

MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 17: Rekurrenslikninger

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

16. mars 2010

(Sist oppdatert: 2010-03-16 14:14)



Forelesning 17

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

- Forrige gang ga vi en rekke eksempler på bruk av induksjonsbevis og rekursivt definerte funksjoner.

Rekurrenslikninger

- Forrige gang ga vi en rekke eksempler på bruk av induksjonsbevis og rekursivt definerte funksjoner.
- I et av eksemplene definerte vi **binomialkoeffisientene** og viste en viktig egenskap til binomialkoeffisienter ved induksjon.

Rekurrenslikninger

- Forrige gang ga vi en rekke eksempler på bruk av induksjonsbevis og rekursivt definerte funksjoner.
- I et av eksemplene definerte vi **binomialkoeffisientene** og viste en viktig egenskap til binomialkoeffisienter ved induksjon.
- Både definisjonen og den viste egenskapen er pensum.

Rekurrenslikninger

- Forrige gang ga vi en rekke eksempler på bruk av induksjonsbevis og rekursivt definerte funksjoner.
- I et av eksemplene definerte vi **binomialkoeffisientene** og viste en viktig egenskap til binomialkoeffisienter ved induksjon.
- Både definisjonen og den viste egenskapen er pensum.

-

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Rekurrenslikninger

- Forrige gang ga vi en rekke eksempler på bruk av induksjonsbevis og rekursivt definerte funksjoner.
- I et av eksemplene definerte vi **binomialkoeffisientene** og viste en viktig egenskap til binomialkoeffisienter ved induksjon.
- Både definisjonen og den viste egenskapen er pensum.

- $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Rekurrenslikninger

- Forrige gang ga vi en rekke eksempler på bruk av induksjonsbevis og rekursivt definerte funksjoner.
- I et av eksemplene definerte vi **binomialkoeffisientene** og viste en viktig egenskap til binomialkoeffisienter ved induksjon.
- Både definisjonen og den viste egenskapen er pensum.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$
- $\binom{n}{k}$ forteller oss på hvor mange forskjellige delmengder med k elementer det er av en mengde med n elementer.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

- Det siste kvarteret snakket vi om **rekurrens**.

Rekurrenslikninger

- Det siste kvarteret snakket vi om **rekurrens**.
- Dette vil være hovedtemaet i dag.

Rekurrenslikninger

- Det siste kvarteret snakket vi om **rekurrens**.
- Dette vil være hovedtemaet i dag.
- Vi skal først se på noen eksempler på rekurrenslikninger som tilnærming til en generell metode for å løse slike likninger.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n$

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6)$

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2$

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$
- $5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n$

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$
- $5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n = 3^n(5 \cdot 3 - 6)$

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$
- $5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n = 3^n(5 \cdot 3 - 6) = 3^n \cdot 3^2$

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$
- $5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n = 3^n(5 \cdot 3 - 6) = 3^n \cdot 3^2 = 3^{n+2}$

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$
- $5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n = 3^n(5 \cdot 3 - 6) = 3^n \cdot 3^2 = 3^{n+2}$
- Det som gjør at denne utregningen fører frem er at **2** og **3** er løsninger av likningen

$$x^2 = 5x - 6$$

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$
- $5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n = 3^n(5 \cdot 3 - 6) = 3^n \cdot 3^2 = 3^{n+2}$
- Det som gjør at denne utregningen fører frem er at **2** og **3** er løsninger av likningen

$$x^2 = 5x - 6$$

og det er de eneste løsningene.

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:

- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$

- $5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n = 3^n(5 \cdot 3 - 6) = 3^n \cdot 3^2 = 3^{n+2}$

- Det som gjør at denne utregningen fører frem er at **2** og **3** er løsninger av likningen

$$x^2 = 5x - 6$$

og det er de eneste løsningene.

- Det betyr at man må kunne løse 2. gradsligninger for å kunne løse slike rekurrensligninger.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

I stedet for å skrive at

$$F(n + 2) = F(n + 1) + 2F(n)$$

skal gjelde for alle $n \in \mathbb{N}$

Rekurrenslikninger

I stedet for å skrive at

$$F(n + 2) = F(n + 1) + 2F(n)$$

skal gjelde for alle $n \in \mathbb{N}$

kan vi skrive at

$$F(n) - F(n - 1) - 2F(n - 2) = 0$$

for alle $n \geq 3$,

Rekurrenslikninger

I stedet for å skrive at

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

skal gjelde for alle $n \in \mathbb{N}$

kan vi skrive at

$$F(n) - F(n-1) - 2F(n-2) = 0$$

for alle $n \geq 3$,

og i stedet for å skrive at

$$F(n+2) = 5F(n+1) - 6F(n)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$

Rekurrenslikninger

I stedet for å skrive at

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

skal gjelde for alle $n \in \mathbb{N}$

kan vi skrive at

$$F(n) - F(n-1) - 2F(n-2) = 0$$

for alle $n \geq 3$,

og i stedet for å skrive at

$$F(n+2) = 5F(n+1) - 6F(n)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$

kan vi skrive at

$$F(n) - 5F(n-1) + 6F(n-2) = 0$$

for alle $n \geq 3$.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Dette er strengt tatt uendelig mange likninger i uendelig mange variable $F(n)$, men det gir mening å snakke om løsningsmengden til dette likningsettet.

Rekurrenslikninger

Dette er strengt tatt uendelig mange likninger i uendelig mange variable $F(n)$, men det gir mening å snakke om løsningsmengden til dette likningsettet.

Vi vil nå etablere den terminologien vi skal bruke i fortsettelsen, og vise hvordan vi kan finne løsningsmengden til slike *rekurrenslikninger*.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Definisjon

Rekurrenslikninger

Definisjon

- En 2. ordens lineær homogen rekurrenslikning er en funksjonslikning på formen

Rekurrenslikninger

Definisjon

- En 2. ordens lineær homogen rekurrenslikning er en funksjonslikning på formen

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0.$$

Definisjon

- En 2. ordens lineær homogen rekurrenslikning er en funksjonslikning på formen

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0.$$

- En følge $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ er en løsning av rekurrenslikningen hvis $aF(n) + bF(n - 1) + cF(n - 2) = 0$ for alle $n \geq 3$.

Definisjon

- En 2. ordens lineær homogen rekurrenslikning er en funksjonslikning på formen

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0.$$

- En følge $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ er en løsning av rekurrenslikningen hvis $aF(n) + bF(n - 1) + cF(n - 2) = 0$ for alle $n \geq 3$.
- Hvis verdiene for $t(1)$ og/eller $t(2)$ er angitt i tillegg, kalles dette initialbetingelser.

Definisjon

- En 2. ordens lineær homogen rekurrenslikning er en funksjonslikning på formen

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0.$$

- En følge $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ er en løsning av rekurrenslikningen hvis $aF(n) + bF(n - 1) + cF(n - 2) = 0$ for alle $n \geq 3$.
- Hvis verdiene for $t(1)$ og/eller $t(2)$ er angitt i tillegg, kalles dette initialbetingelser.
- En løsning må da tilfredstille disse betingelsene.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel

Eksempel

- Fibonacci-følgen er bestemt som den eneste løsningen $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ av

Eksempel

- Fibonacci-følgen er bestemt som den eneste løsningen $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ av

$$t(n) - t(n-1) - t(n-2) = 0$$

Eksempel

- Fibonacci-følgen er bestemt som den eneste løsningen $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ av

$$t(n) - t(n-1) - t(n-2) = 0$$

med initialbetingelser $t(1) = t(2) = 1$

Eksempel

- Fibonacci-følgen er bestemt som den eneste løsningen $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ av

$$t(n) - t(n-1) - t(n-2) = 0$$

med initialbetingelser $t(1) = t(2) = 1$

- Vi skal finne en formel for $F(n)$ når vi har utviklet metoden for det.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Merk

Rekurrenslikninger

Merk

- Vi kaller rekurrenslikningen **lineær** fordi likningens venstre side er en lineær kombinasjon av $t(n)$, $t(n - 1)$ og $t(n - 2)$.

Rekurrenslikninger

Merk

- Vi kaller rekurrenslikningen **lineær** fordi likningens venstre side er en lineær kombinasjon av $t(n)$, $t(n - 1)$ og $t(n - 2)$.

Eksempelvis vil ikke

$$t(n) - (t(n - 1))^2 - t(n - 2) = 0$$

være lineær

Rekurrenslikninger

Merk

- Vi kaller rekurrenslikningen **lineær** fordi likningens venstre side er en lineær kombinasjon av $t(n)$, $t(n - 1)$ og $t(n - 2)$.

Eksempelvis vil ikke

$$t(n) - (t(n - 1))^2 - t(n - 2) = 0$$

være lineær fordi vi har et ledd av grad 2.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Merk (fortsatt)

Rekurrenslikninger

Merk (fortsatt)

- Vi kaller likningen **homogen** fordi vi ikke har noe ledd som bare avhenger av n .

Rekurrenslikninger

Merk (fortsatt)

- Vi kaller likningen **homogen** fordi vi ikke har noe ledd som bare avhenger av n .

Eksempelvis er ikke

$$t(n) - t(n - 1) + 0 \cdot t(n - 2) + n = 0$$

homogen

Rekurrenslikninger

Merk (fortsatt)

- Vi kaller likningen **homogen** fordi vi ikke har noe ledd som bare avhenger av n .

Eksempelvis er ikke

$$t(n) - t(n - 1) + 0 \cdot t(n - 2) + n = 0$$

homogen fordi vi har et ledd n .

Rekurrenslikninger

Merk (fortsatt)

- Vi kaller likningen **homogen** fordi vi ikke har noe ledd som bare avhenger av n .

Eksempelvis er ikke

$$t(n) - t(n - 1) + 0 \cdot t(n - 2) + n = 0$$

homogen fordi vi har et ledd n .

- Likningen er 2. ordens fordi verdien av $t(n)$ avhenger av to verdier $t(n - 1)$ og $t(n - 2)$.

Rekurrenslikninger

Merk (fortsatt)

- Vi kaller likningen **homogen** fordi vi ikke har noe ledd som bare avhenger av n .

Eksempelvis er ikke

$$t(n) - t(n - 1) + 0 \cdot t(n - 2) + n = 0$$

homogen fordi vi har et ledd n .

- Likningen er 2. ordens fordi verdien av $t(n)$ avhenger av to verdier $t(n - 1)$ og $t(n - 2)$.

Likningen $t(n) - 2t(n - 1) = 0$ er 1. ordens,

Rekurrenslikninger

Merk (fortsatt)

- Vi kaller likningen **homogen** fordi vi ikke har noe ledd som bare avhenger av n .

Eksempelvis er ikke

$$t(n) - t(n - 1) + 0 \cdot t(n - 2) + n = 0$$

homogen fordi vi har et ledd n .

- Likningen er 2. ordens fordi verdien av $t(n)$ avhenger av to verdier $t(n - 1)$ og $t(n - 2)$.

Likningen $t(n) - 2t(n - 1) = 0$ er 1. ordens, mens $t(n) - t(n - 1) + t(n - 2) - t(n - 3) = 0$ er 3. ordens.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Merk (Fortsatt)

Merk (Fortsatt)

- Alt vi sier vil kunne gjøres gjeldende for 1. ordens og 3. ordens homogene, lineære likninger også, men vi skal konsentrere oss om de 2. ordens likningene.

Merk (Fortsatt)

- Alt vi sier vil kunne gjøres gjeldende for 1. ordens og 3. ordens homogene, lineære likninger også, men vi skal konsentrere oss om de 2. ordens likningene.
- For enkelthets skyld vil vi bruke betegnelsen **rekurrenslikning** i betydningen **2. ordens lineær homogen rekurrenslikning**, ettersom vi vil begrense oss til denne typen rekurrenslikninger.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

- Da vi analyserte mulige løsninger av likningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

Rekurrenslikninger

- Da vi analyserte mulige løsninger av likningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

kommenterte vi at vi utnyttet at 3 og 2 er løsninger i likningen

Rekurrenslikninger

- Da vi analyserte mulige løsninger av likningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

kommenterte vi at vi utnyttet at 3 og 2 er løsninger i likningen

$$x^2 = 5x - 6$$

Rekurrenslikninger

- Da vi analyserte mulige løsninger av likningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

kommenterte vi at vi utnyttet at 3 og 2 er løsninger i likningen

$$x^2 = 5x - 6$$

da vi viste at $F_1(n) = 3^n$ og $F_2(n) = 2^n$ er løsninger av rekurrenslikningen.

Rekurrenslikninger

- Da vi analyserte mulige løsninger av likningen

$$F(n + 2) = 5F(n + 1) - 6F(n)$$

kommenterte vi at vi utnyttet at 3 og 2 er løsninger i likningen

$$x^2 = 5x - 6$$

da vi viste at $F_1(n) = 3^n$ og $F_2(n) = 2^n$ er løsninger av rekurrenslikningen.

- Denne innsikten skal vi utvikle til en fullstendig innsikt i hvilke løsninger vi har:

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Definisjon

Rekurrenslikninger

Definisjon

Hvis

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

Rekurrenslikninger

Definisjon

Hvis

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

er en rekurrenslikning, kalles

Rekurrenslikninger

Definisjon

Hvis

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

er en rekurrenslikning, kalles

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Rekurrenslikninger

Definisjon

Hvis

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

er en rekurrenslikning, kalles

$$ax^2 + bx + c = 0$$

for **den karakteristiske likningen** til rekurrenslikningen.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Teorem

Rekurrenslikninger

Teorem

La

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

være en rekurrenslikning og la $r \in \mathbb{R}$.

Rekurrenslikninger

Teorem

La

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

være en rekurrenslikning og la $r \in \mathbb{R}$.

Da er $F_r(n) = r^n$ en løsning av rekurrenslikningen hvis og bare hvis r er en løsning av den *karakteristiske* likningen.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Bevis

Rekurrenslikninger

Bevis

Anta at r er en løsning av den karakteristiske likningen.

Rekurrenslikninger

Bevis

Anta at r er en løsning av den karakteristiske likningen.

Vi setter F_r inn i likningene, og får

Rekurrenslikninger

Bevis

Anta at r er en løsning av den karakteristiske likningen.

Vi setter F_r inn i likningene, og får

$$ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} = r^{n-2}(ar^2 + br + c) = 0,$$

Rekurrenslikninger

Bevis

Anta at r er en løsning av den karakteristiske likningen.

Vi setter F_r inn i likningene, og får

$$ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} = r^{n-2}(ar^2 + br + c) = 0,$$

det siste fordi r er løsning av den karakteristiske likningen.

Rekurrenslikninger

Bevis

Anta at r er en løsning av den karakteristiske likningen.

Vi setter F_r inn i likningene, og får

$$ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} = r^{n-2}(ar^2 + br + c) = 0,$$

det siste fordi r er løsning av den karakteristiske likningen.

Anta så at $F_r(n) = r^n$ løser rekurrenslikningen.

Rekurrenslikninger

Bevis

Anta at r er en løsning av den karakteristiske likningen.

Vi setter F_r inn i likningene, og får

$$ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} = r^{n-2}(ar^2 + br + c) = 0,$$

det siste fordi r er løsning av den karakteristiske likningen.

Anta så at $F_r(n) = r^n$ løser rekurrenslikningen.

Setter vi inn for $n = 3$ får vi spesielt

$$ar^3 + br^2 + cr^1 = 0$$

Rekurrenslikninger

Bevis

Anta at r er en løsning av den karakteristiske likningen.

Vi setter F_r inn i likningene, og får

$$ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} = r^{n-2}(ar^2 + br + c) = 0,$$

det siste fordi r er løsning av den karakteristiske likningen.

Anta så at $F_r(n) = r^n$ løser rekurrenslikningen.

Setter vi inn for $n = 3$ får vi spesielt

$$ar^3 + br^2 + cr^1 = 0$$

som akkurat sier at $ar^2 + br + c = 0$ eller $r = 0$. Det siste er umulig hvis $c \neq 0$, noe som er tilfelle med en 2. ordens likning.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Dette resultatet forteller oss at vi ofte kan finne to løsninger av en rekurrenslikning.

Rekurrenslikninger

Dette resultatet forteller oss at vi ofte kan finne to løsninger av en rekurrenslikning.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen inneholder kvadrattrot-tegn, vil de eksakte formlene for løsningene gjøre det samme.

Rekurrenslikninger

Dette resultatet forteller oss at vi ofte kan finne to løsninger av en rekurrenslikning.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen inneholder kvadrattrot-tegn, vil de eksakte formlene for løsningene gjøre det samme.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen er komplekse tall, vil vi trenge komplekse tall for å beskrive løsningene av rekurrenslikningen.

Rekurrenslikninger

Dette resultatet forteller oss at vi ofte kan finne to løsninger av en rekurrenslikning.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen inneholder kvadrattrot-tegn, vil de eksakte formlene for løsningene gjøre det samme.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen er komplekse tall, vil vi trenge komplekse tall for å beskrive løsningene av rekurrenslikningen.

Vi har imidlertid fortsatt bare to løsninger. Hvordan finner vi flere?

Rekurrenslikninger

Dette resultatet forteller oss at vi ofte kan finne to løsninger av en rekurrenslikning.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen inneholder kvadrattrot-tegn, vil de eksakte formlene for løsningene gjøre det samme.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen er komplekse tall, vil vi trenge komplekse tall for å beskrive løsningene av rekurrenslikningen.

Vi har imidlertid fortsatt bare to løsninger. Hvordan finner vi flere? Setningen på neste side er et godt hjelpemiddel.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Teorem

Rekurrenslikninger

Teorem

La

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

være en rekurrenslikning ,

Rekurrenslikninger

Teorem

La

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

være en rekurrenslikning ,

og la $F(n)$ og $G(n)$ være to løsninger.

Rekurrenslikninger

Teorem

La

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

være en rekurrenslikning ,

og la $F(n)$ og $G(n)$ være to løsninger.

La A og B være reelle tall.

Teorem

La

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

være en rekurrenslikning ,

og la $F(n)$ og $G(n)$ være to løsninger.

La A og B være reelle tall.

Da er $H(n) = A \cdot F(n) + B \cdot G(n)$ også en løsning.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Bevis

Rekurrenslikninger

Bevis

- Det er bare å sette H inn i rekurrenslikningen og sjekke:

Rekurrenslikninger

Bevis

- Det er bare å sette H inn i rekurrenslikningen og sjekke:

$$a \cdot H(n) + b \cdot H(n - 1) + c \cdot H(n - 2)$$

Rekurrenslikninger

Bevis

- Det er bare å sette H inn i rekurrenslikningen og sjekke:

$$a \cdot H(n) + b \cdot H(n-1) + c \cdot H(n-2)$$

$$\begin{aligned} &= a(A \cdot F(n) + B \cdot G(n)) + b(A \cdot F(n-1) + B \cdot G(n-1)) \\ &\quad + c(A \cdot F(n-2) + B \cdot G(n-2)) \end{aligned}$$

Rekurrenslikninger

Bevis

- Det er bare å sette H inn i rekurrenslikningen og sjekke:

$$a \cdot H(n) + b \cdot H(n-1) + c \cdot H(n-2)$$

$$= a(A \cdot F(n) + B \cdot G(n)) + b(A \cdot F(n-1) + B \cdot G(n-1)) \\ + c(A \cdot F(n-2) + B \cdot G(n-2))$$

$$= A \cdot (a \cdot F(n) + b \cdot F(n-1) + c \cdot F(n-2)) \\ + B \cdot (a \cdot G(n) + b \cdot G(n-1) + c \cdot G(n-2))$$

Rekurrenslikninger

Bevis

- Det er bare å sette H inn i rekurrenslikningen og sjekke:

$$a \cdot H(n) + b \cdot H(n-1) + c \cdot H(n-2)$$

$$\begin{aligned} &= a(A \cdot F(n) + B \cdot G(n)) + b(A \cdot F(n-1) + B \cdot G(n-1)) \\ &\quad + c(A \cdot F(n-2) + B \cdot G(n-2)) \end{aligned}$$

$$= A \cdot (a \cdot F(n) + b \cdot F(n-1) + c \cdot F(n-2))$$

$$+ B \cdot (a \cdot G(n) + b \cdot G(n-1) + c \cdot G(n-2))$$

$$= A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0.$$

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel

Rekurrenslikninger

Eksempel

- La oss gå tilbake til likningen for Fibonacci-tallene:

Eksempel

- La oss gå tilbake til likningen for Fibonacci-tallene:

$$t(n) - t(n - 1) - t(n - 2) = 0.$$

Eksempel

- La oss gå tilbake til likningen for Fibonacci-tallene:

$$t(n) - t(n - 1) - t(n - 2) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Eksempel

- La oss gå tilbake til likningen for Fibonacci-tallene:

$$t(n) - t(n-1) - t(n-2) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - x - 1 = 0$$

og ved abc-formelen har vi løsninger

Eksempel

- La oss gå tilbake til likningen for Fibonacci-tallene:

$$t(n) - t(n-1) - t(n-2) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - x - 1 = 0$$

og ved abc-formelen har vi løsninger

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

Det betyr at vi bør lete etter en løsning på formen

Eksempel (Fortsatt)

Det betyr at vi bør lete etter en løsning på formen

$$F(n) = A\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

Vi vet at hvis vi finner A og B slik at initialbetingelsene $F(1) = F(2) = 1$ holder, så må vi ha funnet den eneste løsningen som fins.

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Vi vet at hvis vi finner A og B slik at initialbetingelsene $F(1) = F(2) = 1$ holder, så må vi ha funnet den eneste løsningen som fins.

Det gir oss to **stygge** lineære likninger i de ukjente A og B

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Vi vet at hvis vi finner A og B slik at initialbetingelsene $F(1) = F(2) = 1$ holder, så må vi ha funnet den eneste løsningen som fins.

Det gir oss to **stygge** lineære likninger i de ukjente A og B

$$A \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + B \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Vi vet at hvis vi finner A og B slik at initialbetingelsene $F(1) = F(2) = 1$ holder, så må vi ha funnet den eneste løsningen som fins.

Det gir oss to **stygge** lineære likninger i de ukjente A og B

$$A \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + B \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

$$A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1$$

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Vi vet at hvis vi finner A og B slik at initialbetingelsene $F(1) = F(2) = 1$ holder, så må vi ha funnet den eneste løsningen som fins.

Det gir oss to **stygge** lineære likninger i de ukjente A og B

$$A \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + B \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

$$A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1$$

Den som vil løse disse likningene selv, bør lukke øynene på neste side, hvor vi gir løsningene uten mellomregning.

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

$$A = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

og

$$B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

$$A = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

og

$$B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

så formelen for n'te Fibonaccitall $F(n)$ er,

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

$$A = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

og

$$B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

så formelen for n'te Fibonaccitall $F(n)$ er, utrolig nok,

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

$$A = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

og

$$B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

så formelen for n'te Fibonaccitall $F(n)$ er, utrolig nok,

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

$$A = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

og

$$B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

så formelen for n'te Fibonaccitall $F(n)$ er, utrolig nok,

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

For hver verdi av n er altså dette et naturlig tall.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

- Hvis den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger r og s , vil alle løsningene av rekurrenslikningen være på formen

$$F(n) = A \cdot r^n + B \cdot s^n.$$

Rekurrenslikninger

- Hvis den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger r og s , vil alle løsningene av rekurrenslikningen være på formen

$$F(n) = A \cdot r^n + B \cdot s^n.$$

- Det er fordi hvis vi i tillegg bestemmer verdiene på $F(1)$ og $F(2)$, vil vi kunne løse likningsettet

$$A \cdot r + B \cdot s = F(1)$$

$$A \cdot r^2 + B \cdot s^2 = F(2).$$

Rekurrenslikninger

- Hvis den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger r og s , vil alle løsningene av rekurrenslikningen være på formen

$$F(n) = A \cdot r^n + B \cdot s^n.$$

- Det er fordi hvis vi i tillegg bestemmer verdiene på $F(1)$ og $F(2)$, vil vi kunne løse likningsettet

$$A \cdot r + B \cdot s = F(1)$$

$$A \cdot r^2 + B \cdot s^2 = F(2).$$

- Dermed finner vi en løsning på formen $F(n) = Ar^n + Bs^n$ som oppfyller initialbetingelsene.

Rekurrenslikninger

- Hvis den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger r og s , vil alle løsningene av rekurrenslikningen være på formen

$$F(n) = A \cdot r^n + B \cdot s^n.$$

- Det er fordi hvis vi i tillegg bestemmer verdiene på $F(1)$ og $F(2)$, vil vi kunne løse likningsettet

$$A \cdot r + B \cdot s = F(1)$$

$$A \cdot r^2 + B \cdot s^2 = F(2).$$

- Dermed finner vi en løsning på formen $F(n) = Ar^n + Bs^n$ som oppfyller initialbetingelsene.
- Vi skal regne gjennom et typisk eksempel.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel

Eksempel

- Anta at vi skal løse følgende oppgave:

Eksempel

- Anta at vi skal løse følgende oppgave:
 - a) Finn alle løsningene av rekurrenslikningen

$$t(n) - 2t(n - 1) - 3t(n - 2) = 0.$$

Eksempel

- Anta at vi skal løse følgende oppgave:

a) Finn alle løsningene av rekurrenslikningen

$$t(n) - 2t(n - 1) - 3t(n - 2) = 0.$$

b) Finn løsningen fra a) som tilfredstiller initialbetingelsene $F(1) = 1$ og $F(2) = 2$.

Eksempel

- Anta at vi skal løse følgende oppgave:

- a) Finn alle løsningene av rekurrenslikningen

$$t(n) - 2t(n - 1) - 3t(n - 2) = 0.$$

- b) Finn løsningen fra a) som tilfredstiller initialbetingelsene $F(1) = 1$ og $F(2) = 2$.
- Det første vi må gjøre er å finne den karakteristiske likningen

Eksempel

- Anta at vi skal løse følgende oppgave:

- a) Finn alle løsningene av rekurrenslikningen

$$t(n) - 2t(n - 1) - 3t(n - 2) = 0.$$

- b) Finn løsningen fra a) som tilfredstiller initialbetingelsene $F(1) = 1$ og $F(2) = 2$.

- Det første vi må gjøre er å finne den karakteristiske likningen

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Eksempel

- Anta at vi skal løse følgende oppgave:

- a) Finn alle løsningene av rekurrenslikningen

$$t(n) - 2t(n - 1) - 3t(n - 2) = 0.$$

- b) Finn løsningen fra a) som tilfredstiller initialbetingelsene $F(1) = 1$ og $F(2) = 2$.

- Det første vi må gjøre er å finne den karakteristiske likningen

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

og løse den:

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

- $$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Eksempel (Fortsatt)



$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

- Siden den karakteristiske likningen har to løsninger, vet vi at den generelle løsningen av rekurrenslikningen er $F(n) = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$.

Eksempel (Fortsatt)



$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

- Siden den karakteristiske likningen har to løsninger, vet vi at den generelle løsningen av rekurrenslikningen er $F(n) = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$.
- Dette løser a).

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

- For å løse b), må vi bestemme A og B slik at initialbetingelsene holder.

Eksempel (Fortsatt)

- For å løse b), må vi bestemme A og B slik at initialbetingelsene holder.
- Det betyr at vi må løse likningene

Eksempel (Fortsatt)

- For å løse b), må vi bestemme A og B slik at initialbetingelsene holder.
- Det betyr at vi må løse likningene
 - $3A - B = 1$ ($n = 1, F(1) = 1$ var en betingelse.)

Eksempel (Fortsatt)

- For å løse b), må vi bestemme A og B slik at initialbetingelsene holder.
- Det betyr at vi må løse likningene
 - $3A - B = 1$ ($n = 1$, $F(1) = 1$ var en betingelse.)
 - $9A + B = 2$ ($n = 2$, $F(2) = 2$ var en betingelse.)

Rekurrenslikninger

Eksempel (fortsatt)

Eksempel (fortsatt)

- Legger vi sammen likningene, får vi $12A = 3$, så $A = \frac{1}{4}$ er en løsning.

Eksempel (fortsatt)

- Legger vi sammen likningene, får vi $12A = 3$, så $A = \frac{1}{4}$ er en løsning.
- Setter vi denne løsningen inn i en av likningene og løser med hensyn på B, får vi $B = -\frac{1}{4}$.

Eksempel (fortsatt)

- Legger vi sammen likningene, får vi $12A = 3$, så $A = \frac{1}{4}$ er en løsning.
- Setter vi denne løsningen inn i en av likningene og løser med hensyn på B, får vi $B = -\frac{1}{4}$.
- Løsningen på oppgave b) er derfor

$$F(n) = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n).$$

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Merk

Merk

- Det er ikke anledning til å ha med seg hjelpemidler til eksamen i MAT1030.

Merk

- Det er ikke anledning til å ha med seg hjelpemidler til eksamen i MAT1030.
- Spesielt er det ikke anledning til å ha med lommeregner.

Merk

- Det er ikke anledning til å ha med seg hjelpemidler til eksamen i MAT1030.
- Spesielt er det ikke anledning til å ha med lommeregner.
- Det betyr at de som har basert seg på å bruke lommeregner for å løse annengradslikninger må begynne å øve seg på å løse dem for hånd.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

- I det forrige eksemplet så vi hvordan vi kan løse enhver rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger.

Rekurrenslikninger

- I det forrige eksemplet så vi hvordan vi kan løse enhver rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger.
- Hva gjør vi hvis det bare fins en løsning?

Rekurrenslikninger

- I det forrige eksemplet så vi hvordan vi kan løse enhver rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger.
- Hva gjør vi hvis det bare fins en løsning?
- Fortsatt vil det være slik at hvis vi kan finne to “uavhengige” følger som løsninger, vil alle andre løsninger være kombinasjoner av disse.

Rekurrenslikninger

- I det forrige eksemplet så vi hvordan vi kan løse enhver rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger.
- Hva gjør vi hvis det bare fins en løsning?
- Fortsatt vil det være slik at hvis vi kan finne to “uavhengige” følger som løsninger, vil alle andre løsninger være kombinasjoner av disse.
- Hvis r er løsningen på den karakteristiske likningen, er fortsatt $F(n) = r^n$ en løsning av rekurrenslikningen.

Rekurrenslikninger

- I det forrige eksemplet så vi hvordan vi kan løse enhver rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger.
- Hva gjør vi hvis det bare fins en løsning?
- Fortsatt vil det være slik at hvis vi kan finne to “uavhengige” følger som løsninger, vil alle andre løsninger være kombinasjoner av disse.
- Hvis r er løsningen på den karakteristiske likningen, er fortsatt $F(n) = r^n$ en løsning av rekurrenslikningen.
- Målet vårt må derfor være å finne en annen løsning i tillegg.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Betrakt rekurrenslikningen

$$t(n) - 4t(n - 1) + 4t(n - 2) = 0.$$

Eksempel

- Betrakt rekurrenslikningen

$$t(n) - 4t(n-1) + 4t(n-2) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Eksempel

- Betrakt rekurrenslikningen

$$t(n) - 4t(n-1) + 4t(n-2) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

- $r = 2$ er den eneste løsningen av den karakteristiske likningen.

Eksempel

- Betrakt rekurrenslikningen

$$t(n) - 4t(n-1) + 4t(n-2) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

- $r = 2$ er den eneste løsningen av den karakteristiske likningen.
- Da er $F(n) = 2^n$ en løsning av rekurrenslikningen.

Eksempel

- Betrakt rekurrenslikningen

$$t(n) - 4t(n - 1) + 4t(n - 2) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

- $r = 2$ er den eneste løsningen av den karakteristiske likningen.
- Da er $F(n) = 2^n$ en løsning av rekurrenslikningen.
- La oss gi to initialbetingelser for å se om det fins noe mønster som antyder hvordan en annen løsning kan se ut:

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:
Regning gir oss at

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4$$

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16$$

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48$$

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48 \text{ og } G(6) = -128$$

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48 \text{ og } G(6) = -128$$

Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48 \text{ og } G(6) = -128$$

Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

$$G(1) = 2^{-1} \cdot 2^1$$

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48 \text{ og } G(6) = -128$$

Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

$$G(1) = 2^{-1} \cdot 2^1, G(2) = 0 \cdot 2^2$$

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48 \text{ og } G(6) = -128$$

Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

$$G(1) = 2^{-1} \cdot 2^1, G(2) = 0 \cdot 2^2, G(3) = -2^{-1} \cdot 2^3$$

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48 \text{ og } G(6) = -128$$

Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

$$G(1) = 2^{-1} \cdot 2^1, G(2) = 0 \cdot 2^2, G(3) = -2^{-1} \cdot 2^3, G(4) = -2 \cdot 2^{-1} \cdot 2^4$$

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48 \text{ og } G(6) = -128$$

Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

$$G(1) = 2^{-1} \cdot 2^1, G(2) = 0 \cdot 2^2, G(3) = -2^{-1} \cdot 2^3, G(4) = -2 \cdot 2^{-1} \cdot 2^4, \\ G(5) = -3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^5$$

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48 \text{ og } G(6) = -128$$

Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

$$G(1) = 2^{-1} \cdot 2^1, G(2) = 0 \cdot 2^2, G(3) = -2^{-1} \cdot 2^3, G(4) = -2 \cdot 2^{-1} \cdot 2^4, \\ G(5) = -3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^5 \text{ og } G(6) = -4 \cdot 2^{-1} \cdot 2^6.$$

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48 \text{ og } G(6) = -128$$

Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

$$G(1) = 2^{-1} \cdot 2^1, G(2) = 0 \cdot 2^2, G(3) = -2^{-1} \cdot 2^3, G(4) = -2 \cdot 2^{-1} \cdot 2^4, \\ G(5) = -3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^5 \text{ og } G(6) = -4 \cdot 2^{-1} \cdot 2^6.$$

Det vil være naturlig å gjette på at $G(n) = (2 - n) \cdot 2^{-1} \cdot 2^n$ er løsningen av rekurrenslikningen.

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

Regning gir oss at

$$G(3) = -4, G(4) = -16, G(5) = -48 \text{ og } G(6) = -128$$

Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

$$G(1) = 2^{-1} \cdot 2^1, G(2) = 0 \cdot 2^2, G(3) = -2^{-1} \cdot 2^3, G(4) = -2 \cdot 2^{-1} \cdot 2^4, \\ G(5) = -3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^5 \text{ og } G(6) = -4 \cdot 2^{-1} \cdot 2^6.$$

Det vil være naturlig å gjette på at $G(n) = (2 - n) \cdot 2^{-1} \cdot 2^n$ er løsningen av rekurrenslikningen.

Vi skal se at det er tilfelle.

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi har gjettest riktig, vil $H(n) = n \cdot 2^n$ også være en løsning av rekurrenslikningen, siden H kan skrives som en kombinasjon av vårt forslag til $G(n)$ og av $F(n)$

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi har gjettest riktig, vil $H(n) = n \cdot 2^n$ også være en løsning av rekurrenslikningen, siden H kan skrives som en kombinasjon av vårt forslag til $G(n)$ og av $F(n)$
- Omvendt, hvis $H(n)$ er en løsning av rekurrenslikningen, er $G(n)$ en kombinasjon av $F(n)$ og $H(n)$, så da er $G(n)$ en løsning av rekurrenslikningen (og den som oppfyller initialbetingelsene).

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi har gjettest riktig, vil $H(n) = n \cdot 2^n$ også være en løsning av rekurrenslikningen, siden H kan skrives som en kombinasjon av vårt forslag til $G(n)$ og av $F(n)$
- Omvendt, hvis $H(n)$ er en løsning av rekurrenslikningen, er $G(n)$ en kombinasjon av $F(n)$ og $H(n)$, så da er $G(n)$ en løsning av rekurrenslikningen (og den som oppfyller initialbetingelsene).
- I så fall er svaret så pent at det er verd et forsøk med et generelt bevis.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Teorem

Teorem

La

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

være en rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen bare har en løsning r .

Rekurrenslikninger

Teorem

La

$$at(n) + bt(n - 1) + ct(n - 2) = 0$$

være en rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen bare har en løsning r .

Da er $H(n) = nr^n$ en løsning av rekurrenslikningen.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Bevis

Rekurrenslikninger

Bevis

Løsningen av den karakteristiske likningen er

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bevis

Løsningen av den karakteristiske likningen er

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Siden det bare er en løsning er $b^2 = 4ac$, fordi det som står under rottegnet må være null.

Bevis

Løsningen av den karakteristiske likningen er

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Siden det bare er en løsning er $b^2 = 4ac$, fordi det som står under rottegnet må være null.

Vi setter $H(n)$ inn i likningen, og får

Bevis

Løsningen av den karakteristiske likningen er

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Siden det bare er en løsning er $b^2 = 4ac$, fordi det som står under rottegnet må være null.

Vi setter $H(n)$ inn i likningen, og får

- $anr^n + b(n-1)r^{n-1} + c(n-2)r^{n-2}$

Rekurrenslikninger

Bevis

Løsningen av den karakteristiske likningen er

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Siden det bare er en løsning er $b^2 = 4ac$, fordi det som står under rottegnet må være null.

Vi setter $H(n)$ inn i likningen, og får

1. $anr^n + b(n-1)r^{n-1} + c(n-2)r^{n-2}$
2. $= r^{n-2}(anr^2 + bnr - br + cn - 2c)$

Bevis

Løsningen av den karakteristiske likningen er

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Siden det bare er en løsning er $b^2 = 4ac$, fordi det som står under rottegnet må være null.

Vi setter $H(n)$ inn i likningen, og får

1. $anr^n + b(n-1)r^{n-1} + c(n-2)r^{n-2}$
2. $= r^{n-2}(anr^2 + bnr - br + cn - 2c)$
3. $= r^{n-2}(n(ar^2 + br + c) - br - 2c)$

Bevis

Løsningen av den karakteristiske likningen er

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Siden det bare er en løsning er $b^2 = 4ac$, fordi det som står under rottegnet må være null.

Vi setter $H(n)$ inn i likningen, og får

1. $anr^n + b(n-1)r^{n-1} + c(n-2)r^{n-2}$
2. $= r^{n-2}(anr^2 + bnr - br + cn - 2c)$
3. $= r^{n-2}(n(ar^2 + br + c) - br - 2c)$
4. $= -r^{n-2}(br + 2c).$

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Bevis (Forklaring)

Rekurrenslikninger

Bevis (Forklaring)

- I linje 1 setter vi $H(n)$ inn i likningen.

Rekurrenslikninger

Bevis (Forklaring)

- I linje 1 setter vi $H(n)$ inn i likningen.
- I linje 2 setter vi den felles faktoren r^{n-2} utenfor samtidig som vi løser opp parentesene $(n - 1)$ og $(n - 2)$.

Bevis (Forklaring)

- I linje 1 setter vi $H(n)$ inn i likningen.
- I linje 2 setter vi den felles faktoren r^{n-2} utenfor samtidig som vi løser opp parentesene $(n-1)$ og $(n-2)$.
- I linje 3 setter vi n utenfor de leddene hvor n er faktor.

Rekurrenslikninger

Bevis (Forklaring)

- I linje 1 setter vi $H(n)$ inn i likningen.
- I linje 2 setter vi den felles faktoren r^{n-2} utenfor samtidig som vi løser opp parentesene $(n-1)$ og $(n-2)$.
- I linje 3 setter vi n utenfor de leddene hvor n er faktor.
- I linje 4 utnytter vi at r er en løsning av den karakteristiske likningen, så $ar^2 + br + c = 0$.

Rekurrenslikninger

Bevis (Forklaring)

- I linje 1 setter vi $H(n)$ inn i likningen.
- I linje 2 setter vi den felles faktoren r^{n-2} utenfor samtidig som vi løser opp parentesene $(n-1)$ og $(n-2)$.
- I linje 3 setter vi n utenfor de leddene hvor n er faktor.
- I linje 4 utnytter vi at r er en løsning av den karakteristiske likningen, så $ar^2 + br + c = 0$.
- For å vise at $H(n)$ er en løsning av rekurrenslikningen, er det altså nok å vise at $br + 2c = 0$

Rekurrenslikninger

Bevis (Forklaring)

- I linje 1 setter vi $H(n)$ inn i likningen.
- I linje 2 setter vi den felles faktoren r^{n-2} utenfor samtidig som vi løser opp parentesene $(n-1)$ og $(n-2)$.
- I linje 3 setter vi n utenfor de leddene hvor n er faktor.
- I linje 4 utnytter vi at r er en løsning av den karakteristiske likningen, så $ar^2 + br + c = 0$.
- For å vise at $H(n)$ er en løsning av rekurrenslikningen, er det altså nok å vise at $br + 2c = 0$
- Her skal vi bruke at r er den eneste løsningen.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Bevis (Fortsatt)

Rekurrenslikninger

Bevis (Fortsatt)

- Siden vi har en 2. ordens likning, vil $a \neq 0$ og $c \neq 0$.

Rekurrenslikninger

Bevis (Fortsatt)

- Siden vi har en 2. ordens likning, vil $a \neq 0$ og $c \neq 0$.
- Siden vi bare har en løsning, er

$$r = \frac{-b}{2a}.$$

Rekurrenslikninger

Bevis (Fortsatt)

- Siden vi har en 2. ordens likning, vil $a \neq 0$ og $c \neq 0$.
- Siden vi bare har en løsning, er

$$r = \frac{-b}{2a}.$$

- Setter vi dette inn i $br + 2c$ får vi

$$b \cdot \frac{-b}{2a} + 2c.$$

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Bevis (Fortsatt)

Bevis (Fortsatt)

- Satt på felles brøkstrek er dette

$$\frac{-b^2 + 4ac}{2a}$$

Bevis (Fortsatt)

- Satt på felles brøkstrek er dette

$$\frac{-b^2 + 4ac}{2a}$$

som er lik 0 fordi $b^2 - 4ac = 0$.

Bevis (Fortsatt)

- Satt på felles brøkstrek er dette

$$\frac{-b^2 + 4ac}{2a}$$

som er lik 0 fordi $b^2 - 4ac = 0$.

- Det var det som gjensto å bevise, så teoremet er vist.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Merk

Rekurrenslikninger

Merk

Vi har nå funnet to løsninger av rekurrenslikningen både i det tilfellet hvor den karakteristiske likningen har to løsninger, og i det tilfellet hvor den bare har en løsning.

Merk

Vi har nå funnet to løsninger av rekurrenslikningen både i det tilfellet hvor den karakteristiske likningen har to løsninger, og i det tilfellet hvor den bare har en løsning.

Siden vi kan finne en **lineær kombinasjon** av slike løsninger for enhver initialbetingelse $t(1) = a$ og $t(2) = b$, har vi i realiteten funnet en generell løsning.

Rekurrenslikninger

Merk

Vi har nå funnet to løsninger av rekurrenslikningen både i det tilfellet hvor den karakteristiske likningen har to løsninger, og i det tilfellet hvor den bare har en løsning.

Siden vi kan finne en **lineær kombinasjon** av slike løsninger for enhver initialbetingelse $t(1) = a$ og $t(2) = b$, har vi i realiteten funnet en generell løsning.

Hvis r og s er to forskjellige løsninger av den karakteristiske likningen, er

$$F(n) = Ar^n + Bs^n$$

den generelle løsningen av rekurrenslikningen.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Merk (Fortsatt)

Rekurrenslikninger

Merk (Fortsatt)

Hvis r er den eneste løsningen av den karakteristiske likningen er

$$F(n) = (A + Bn)r^n$$

den generelle løsningen av rekurrenslikningen.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel

Eksempel

- Anta at vi har fått følgende oppgave:

Eksempel

- Anta at vi har fått følgende oppgave:
- La $t(n) - t(n - 1) + \frac{1}{4}t(n - 2) = 0$ være en rekurrenslikning.

Eksempel

- Anta at vi har fått følgende oppgave:
 - La $t(n) - t(n - 1) + \frac{1}{4}t(n - 2) = 0$ være en rekurrenslikning.
- a) Finn den generelle løsningen $F(n)$ til likningen.

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Anta at vi har fått følgende oppgave:
 - La $t(n) - t(n - 1) + \frac{1}{4}t(n - 2) = 0$ være en rekurrenslikning.
- a) Finn den generelle løsningen $F(n)$ til likningen.
- b) Finn løsningen $G(n)$ som oppfyller at $G(1) = G(2) = 1$.

Rekurrenslikninger

Eksempel

- Anta at vi har fått følgende oppgave:
 - La $t(n) - t(n - 1) + \frac{1}{4}t(n - 2) = 0$ være en rekurrenslikning.
- a) Finn den generelle løsningen $F(n)$ til likningen.
 - b) Finn løsningen $G(n)$ som oppfyller at $G(1) = G(2) = 1$.
 - c) Finn løsningen $H(n)$ som oppfyller at $H(1) = 1$ og $H(2) = 0$.

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

Først må vi finne den karakteristiske likningen

Eksempel (Fortsatt)

Først må vi finne den karakteristiske likningen

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0.$$

Eksempel (Fortsatt)

Først må vi finne den karakteristiske likningen

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0.$$

Vi finner at $r = \frac{1}{2}$ er den eneste løsningen.

Eksempel (Fortsatt)

Først må vi finne den karakteristiske likningen

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0.$$

Vi finner at $r = \frac{1}{2}$ er den eneste løsningen.

Da er den generelle løsningen

$$F(n) = (A + nB)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Eksempel (Fortsatt)

Først må vi finne den karakteristiske likningen

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0.$$

Vi finner at $r = \frac{1}{2}$ er den eneste løsningen.

Da er den generelle løsningen

$$F(n) = (A + nB)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dette løser a)

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

For å løse punkt b), bruker vi de to initialbetingelsene til å finne to likninger med A og B som ukjente

Eksempel (Fortsatt)

For å løse punkt b), bruker vi de to initialbetingelsene til å finne to likninger med A og B som ukjente

- $n = 1$: $(A + B)\frac{1}{2} = 1$, det vil si $A + B = 2$.

Eksempel (Fortsatt)

For å løse punkt b), bruker vi de to initialbetingelsene til å finne to likninger med A og B som ukjente

- $n = 1$: $(A + B)\frac{1}{2} = 1$, det vil si $A + B = 2$.
- $n = 2$: $(A + 2B)(\frac{1}{2})^2 = 1$, det vil si $A + 2B = 4$.

Eksempel (Fortsatt)

For å løse punkt b), bruker vi de to initialbetingelsene til å finne to likninger med A og B som ukjente

- $n = 1$: $(A + B)\frac{1}{2} = 1$, det vil si $A + B = 2$.
- $n = 2$: $(A + 2B)(\frac{1}{2})^2 = 1$, det vil si $A + 2B = 4$.

Disse har løsninger $A = 0$ og $B = 2$, så svaret på b) er

$$G(n) = 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

Rekurrenslikninger

Eksempel (Fortsatt)

For å løse c) setter vi 1 og 0 i høyresidene i likningene over, og får

Eksempel (Fortsatt)

For å løse c) setter vi 1 og 0 i høyresidene i likningene over, og får

- $A + B = 2$

Eksempel (Fortsatt)

For å løse c) setter vi 1 og 0 i høyresidene i likningene over, og får

- $A + B = 2$
- $A + 2B = 4$

Eksempel (Fortsatt)

For å løse c) setter vi 1 og 0 i høyresidene i likningene over, og får

- $A + B = 2$
- $A + 2B = 4$

som har $A = 4$ og $B = -2$ som løsninger.

Eksempel (Fortsatt)

For å løse c) setter vi 1 og 0 i høyresidene i likningene over, og får

- $A + B = 2$
- $A + 2B = 4$

som har $A = 4$ og $B = -2$ som løsninger.

Løsningen på c) er derfor

$$H(n) = (4 - 2n)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Rekurrenslikninger

Rekurrenslikninger

Spiller så rekurrenslikninger noen rolle i informatikken?

Rekurrenslikninger

Spiller så rekurrenslikninger noen rolle i informatikken?

Hvis man skal analysere kompleksiteten av en algoritme, det vil si finne ut av hvor mange regneskritt som trenges som funksjon av størrelsen på input, risikerer man at resultatet blir en inhomogen rekurrenslikning. (Dette er observert på vitenskapelig foredrag om temaet).

Rekurrenslikninger

Spiller så rekurrenslikninger noen rolle i informatikken?

Hvis man skal analysere kompleksiteten av en algoritme, det vil si finne ut av hvor mange regneskritt som trengs som funksjon av størrelsen på input, risikerer man at resultatet blir en inhomogen rekurrenslikning. (Dette er observert på vitenskapelig foredrag om temaet).

Da vil regnetiden vokse eksponensielt med størrelsen på input.

Rekurrenslikninger

Spiller så rekurrenslikninger noen rolle i informatikken?

Hvis man skal analysere kompleksiteten av en algoritme, det vil si finne ut av hvor mange regneskritt som trengs som funksjon av størrelsen på input, risikerer man at resultatet blir en inhomogen rekurrenslikning. (Dette er observert på vitenskapelig foredrag om temaet).

Da vil regnetiden vokse eksponensielt med størrelsen på input.

Hvis grunntallet i denne eksponenten ikke er så mye større enn 1, er ikke det nødvendigvis ødeleggende for nytten av algoritmen.

Rekurrenslikninger

Spiller så rekurrenslikninger noen rolle i informatikken?

Hvis man skal analysere kompleksiteten av en algoritme, det vil si finne ut av hvor mange regneskritt som trengs som funksjon av størrelsen på input, risikerer man at resultatet blir en inhomogen rekurrenslikning. (Dette er observert på vitenskapelig foredrag om temaet).

Da vil regnetiden vokse eksponensielt med størrelsen på input.

Hvis grunntallet i denne eksponenten ikke er så mye større enn 1, er ikke det nødvendigvis ødeleggende for nytten av algoritmen.

Det er stor forskjell på en algoritme hvor regnetiden er begrenset av $1000(1,08)^n$ og en der regnetiden er begrenset av $2(1,23)^n$, hvor n er antall bit i input. n trenger ikke å være så veldig stor før den første trolig er mer effektiv enn den andre.