

# MAT1030 – Diskret Matematikk

## Forelesning 10: Mengdelære

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

17. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-17 12:39)



# Kapittel 5: Mengdelære

# Oversikt

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - union  $\cup$ :

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - union  $\cup$ :  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - union  $\cup$ :  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - snitt  $\cap$ :



# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - **union**  $\cup$ :  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - **snitt**  $\cap$ :  $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - union  $\cup$ :  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - snitt  $\cap$ :  $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - komplement  $\bar{A}$ :

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - union  $\cup$ :  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - snitt  $\cap$ :  $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - komplement  $\bar{A}$ :  $\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\}$

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - union  $\cup$ :  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - snitt  $\cap$ :  $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - komplement  $\bar{A}$ :  $\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\}$
  - mengdedifferens  $A - B$ :

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - union  $\cup$ :  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - snitt  $\cap$ :  $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - komplement  $\bar{A}$ :  $\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\}$
  - mengdedifferens  $A - B$ :  $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
  - Vi har innført de Boolske operasjonene,
    - union  $\cup$ :  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
    - snitt  $\cap$ :  $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
    - komplement  $\bar{A}$ :  $\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\}$
    - mengdedifferens  $A - B$ :  $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- samt de faste mengdene  $\emptyset$  og  $\mathcal{E}$ .

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - union  $\cup$ :  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - snitt  $\cap$ :  $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - komplement  $\bar{A}$ :  $\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\}$
  - mengdedifferens  $A - B$ :  $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

samt de faste mengdene  $\emptyset$  og  $\mathcal{E}$ .

- Vi tegnet Venndiagrammet tilhørende de forskjellige Boolske operasjonene, og begynte på et eksempel på litt mer avansert bruk av Venndiagrammer.

# Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - union  $\cup$ :  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - snitt  $\cap$ :  $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - komplement  $\bar{A}$ :  $\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\}$
  - mengdedifferens  $A - B$ :  $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

samt de faste mengdene  $\emptyset$  og  $\mathcal{E}$ .

- Vi tegnet Venndiagrammet tilhørende de forskjellige Boolske operasjonene, og begynte på et eksempel på litt mer avansert bruk av Venndiagrammer.
- Vi fortsetter med flere eksempler (på tavlen).



# Mengdeteoretiske lover

# Mengdeteoretiske lover

## Eksempel

# Mengdeteoretiske lover

## Eksempel

- deMorgans lover

# Mengdeteoretiske lover

## Eksempel

- deMorgans lover
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (som vi så på i går).

# Mengdeteoretiske lover

## Eksempel

- deMorgans lover
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (som vi så på i går).
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

# Mengdeteoretiske lover

## Eksempel

- deMorgans lover
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (som vi så på i går).
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- De distributive lovene

# Mengdeteoretiske lover

## Eksempel

- deMorgans lover
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (som vi så på i går).
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- De distributive lovene
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

# Mengdeteoretiske lover

## Eksempel

- deMorgans lover
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (som vi så på i går).
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- De distributive lovene
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



# Mengdeteoretiske lover

## Eksempel

- deMorgans lover
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (som vi så på i går).
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- De distributive lovene
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

## Eksempel

# Mengdeteoretiske lover

## Eksempel

- deMorgans lover
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (som vi så på i går).
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- De distributive lovene
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

## Eksempel

- $A \cap \overline{(B \cup C)} = (A - B) \cap (A - C)$

# Mengdeteoretiske lover

## Eksempel

- deMorgans lover
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (som vi så på i går).
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- De distributive lovene
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

## Eksempel

- $A \cap \overline{(B \cup C)} = (A - B) \cap (A - C)$
- $(\overline{A} - B) \cap C = C - (A \cup B)$

# Mengdeteoretiske lover

# Mengdeteoretiske lover

## Oppgave

# Mengdeteoretiske lover

## Oppgave

- Vi bruker bare Venndiagrammer for uttrykk med en, to eller tre mengder.

## Oppgave

- Vi bruker bare Venndiagrammer for uttrykk med en, to eller tre mengder.
- Tegn et Venndiagram for tre mengder  $A$ ,  $B$  og  $C$ , og sett inn sannhetsverdiene for de tre basisutsagnene  $x \in A$ ,  $x \in B$  og  $x \in C$  i de forskjellige feltene.

## Oppgave

- Vi bruker bare Venndiagrammer for uttrykk med en, to eller tre mengder.
- Tegn et Venndiagram for tre mengder  $A$ ,  $B$  og  $C$ , og sett inn sannhetsverdiene for de tre basisutsagnene  $x \in A$ ,  $x \in B$  og  $x \in C$  i de forskjellige feltene.
- Undersøk hvor mange deler det er mulig å dele planet inn i ved hjelp av fire sirkler.



## Oppgave

- Vi bruker bare Venndiagrammer for uttrykk med en, to eller tre mengder.
- Tegn et Venndiagram for tre mengder  $A$ ,  $B$  og  $C$ , og sett inn sannhetsverdiene for de tre basisutsagnene  $x \in A$ ,  $x \in B$  og  $x \in C$  i de forskjellige feltene.
- Undersøk hvor mange deler det er mulig å dele planet inn i ved hjelp av fire sirkler.
- Forklar hvorfor dette viser at Venndiagrammer ikke er hensiktsmessige for Boolske uttrykk med mer enn tre mengder.

# Inklusjon

## Eksempel

## Eksempel

- Det er selvfølgelig slik at alle tall som kan deles på 4 også er partall.

## Eksempel

- Det er selvfølgelig slik at alle tall som kan deles på 4 også er partall.

Vi sier da at mengden av tall delelige med 4 er **inneholdt** i partallene, eller at den er en **delmengde** av partallene.

## Eksempel

- Det er selvfølgelig slik at alle tall som kan deles på 4 også er partall.  
Vi sier da at mengden av tall delelige med 4 er **inneholdt** i partallene, eller at den er en **delmengde** av partallene.
- Mengden av registrerte fødselsnummere er inneholdt i mengden av alle data registrert i skattedirektoratet.

## Eksempel

- Det er selvfølgelig slik at alle tall som kan deles på 4 også er partall.  
Vi sier da at mengden av tall delelige med 4 er **inneholdt** i partallene, eller at den er en **delmengde** av partallene.
- Mengden av registrerte fødselsnummere er inneholdt i mengden av alle data registrert i skattedirektoratet.
- Mengden av hunder er en delmengde av mengden av dyr.

# Inklusjon



# Inklusjon

## Definisjon

# Inklusjon

## Definisjon

Hvis  $A$  og  $B$  er mengder, sier vi at  $A$  er **inneholdt** i  $B$ , eller at  $A$  er en **delmengde** av  $B$ , hvis

# Inklusjon

## Definisjon

Hvis  $A$  og  $B$  er mengder, sier vi at  $A$  er **inneholdt** i  $B$ , eller at  $A$  er en **delmengde** av  $B$ , hvis

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

## Definisjon

Hvis  $A$  og  $B$  er mengder, sier vi at  $A$  er **inneholdt** i  $B$ , eller at  $A$  er en **delmengde** av  $B$ , hvis

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

- Vi skriver

$$A \subseteq B$$

## Definisjon

Hvis  $A$  og  $B$  er mengder, sier vi at  $A$  er **inneholdt** i  $B$ , eller at  $A$  er en **delmengde** av  $B$ , hvis

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

- Vi skriver

$$A \subseteq B$$

for at  $A$  er inneholdt i  $B$ .

# Inklusjon

# Inklusjon

- Vi vil kunne skrive  $A \subseteq B$  selv om  $A = B$ .

# Inklusjon

- Vi vil kunne skrive  $A \subseteq B$  selv om  $A = B$ .
- Noen forfattere bruker  $A \subset B$  slik vi bruker  $A \subseteq B$  mens andre bruker det i betydningen

$$A \subseteq B \wedge A \neq B.$$



# Inklusjon

- Vi vil kunne skrive  $A \subseteq B$  selv om  $A = B$ .
- Noen forfattere bruker  $A \subset B$  slik vi bruker  $A \subseteq B$  mens andre bruker det i betydningen

$$A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

- I dette siste tilfellet vil vi si at  $A$  er ekte inneholdt i  $B$ .

# Inklusjon

# Inklusjon

## Eksempel

# Inklusjon

## Eksempel

- $\{2, 5, 6\} \subseteq \{1, 2, 5, 6, 7\}$  og inklusjonen er ekte.

# Inklusjon

## Eksempel

- $\{2, 5, 6\} \subseteq \{1, 2, 5, 6, 7\}$  og inklusjonen er **ekte**.
- I følge læreboka vil

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{J} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

## Eksempel

- $\{2, 5, 6\} \subseteq \{1, 2, 5, 6, 7\}$  og inklusjonen er **ekte**.
- I følge læreboka vil

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{J} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Når vi ser på disse mengdene som datatyper, vet vi at vi må bruke forskjellige måter å representere et tall i  $\mathbb{J}$  på, avhengig av om vi ser på tallet som et element i  $\mathbb{J}$  eller  $\mathbb{R}$ .

## Eksempel

- $\{2, 5, 6\} \subseteq \{1, 2, 5, 6, 7\}$  og inklusjonen er ekte.
- I følge læreboka vil

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{J} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Når vi ser på disse mengdene som datatyper, vet vi at vi må bruke forskjellige måter å representere et tall i  $\mathbb{J}$  på, avhengig av om vi ser på tallet som et element i  $\mathbb{J}$  eller  $\mathbb{R}$ .

Denne påstanden er derfor ikke helt uproblematisk, men dog akseptabel for våre formål.

## Eksempel

- $\{2, 5, 6\} \subseteq \{1, 2, 5, 6, 7\}$  og inklusjonen er **ekte**.
- I følge læreboka vil

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{J} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Når vi ser på disse mengdene som datatyper, vet vi at vi må bruke forskjellige måter å representere et tall i  $\mathbb{J}$  på, avhengig av om vi ser på tallet som et element i  $\mathbb{J}$  eller  $\mathbb{R}$ .

Denne påstanden er derfor ikke helt uproblematisk, men dog akseptabel for våre formål.

- $\{x : x^2 > 4\} \subseteq \{x : x^2 > 4 \vee x < -1\}$ .



# Inklusjon

# Inklusjon

Vi kan bruke Venndiagrammer til å vise at et Boolsk uttrykk alltid definerer en delmengde av mengden definert ved et annet Boolsk uttrykk.

# Inklusjon

Vi kan bruke Venndiagrammer til å vise at et Boolsk uttrykk alltid definerer en delmengde av mengden definert ved et annet Boolsk uttrykk.

Vi skal se et par eksempler på tavlen.

# Inklusjon

Vi kan bruke Venndiagrammer til å vise at et Boolsk uttrykk alltid definerer en delmengde av mengden definert ved et annet Boolsk uttrykk.

Vi skal se et par eksempler på tavlen.

## Eksempel

# Inklusjon

Vi kan bruke Venndiagrammer til å vise at et Boolsk uttrykk alltid definerer en delmengde av mengden definert ved et annet Boolsk uttrykk.

Vi skal se et par eksempler på tavlen.

## Eksempel

- $A \cap B \subseteq A \cup B$

# Inklusjon

Vi kan bruke Venndiagrammer til å vise at et Boolsk uttrykk alltid definerer en delmengde av mengden definert ved et annet Boolsk uttrykk.

Vi skal se et par eksempler på tavlen.

## Eksempel

- $A \cap B \subseteq A \cup B$
- $\bar{A} \cap (B - C) \subseteq B - (A \cap C)$

# Disjunkte mengder

# Disjunkte mengder

## Definisjon

To mengder  $A$  og  $B$  er **disjunkte** hvis de ikke har noen felles elementer,



# Disjunkte mengder

## Definisjon

To mengder  $A$  og  $B$  er **disjunkte** hvis de ikke har noen felles elementer, det vil si, hvis

$$A \cap B = \emptyset.$$

# Disjunkte mengder

## Definisjon

To mengder  $A$  og  $B$  er **disjunkte** hvis de ikke har noen felles elementer, det vil si, hvis

$$A \cap B = \emptyset.$$

## Eksempel

# Disjunkte mengder

## Definisjon

To mengder  $A$  og  $B$  er **disjunkte** hvis de ikke har noen felles elementer, det vil si, hvis

$$A \cap B = \emptyset.$$

## Eksempel

- $\{0, 4, 7, 9\}$  og  $\{1, 2, 5, 10\}$  er disjunkte.

# Disjunkte mengder

## Definisjon

To mengder  $A$  og  $B$  er **disjunkte** hvis de ikke har noen felles elementer, det vil si, hvis

$$A \cap B = \emptyset.$$

## Eksempel

- $\{0, 4, 7, 9\}$  og  $\{1, 2, 5, 10\}$  er disjunkte.
- $\{0, 4, 5, 7, 9\}$  og  $\{0, 2, 5, 10\}$  er ikke disjunkte.

# Disjunkte mengder

## Definisjon

To mengder  $A$  og  $B$  er **disjunkte** hvis de ikke har noen felles elementer, det vil si, hvis

$$A \cap B = \emptyset.$$

## Eksempel

- $\{0, 4, 7, 9\}$  og  $\{1, 2, 5, 10\}$  er disjunkte.
- $\{0, 4, 5, 7, 9\}$  og  $\{0, 2, 5, 10\}$  er ikke disjunkte.  
Snittet av disse to mengdene er  $\{0, 5\} \neq \emptyset$ .

# Boolsk algebra

# Boolsk algebra

- Det er en nær sammenheng mellom Boolsk mengdealgebra og utsagnslogikk.

# Boolsk algebra

- Det er en nær sammenheng mellom Boolsk mengdealgebra og utsagnslogikk.
- Ved å erstatte  $A$  med  $x \in A$  oppfattet som en utsagnsvariabel, kan vi spisse  $\cup$  til  $\vee$ ,  $\cap$  til  $\wedge$  og erstatte komplement  $\overline{A}$  med  $\neg(x \in A)$ , og vi får en utsagnslogisk formel.



# Boolsk algebra

- Det er en nær sammenheng mellom Boolsk mengdealgebra og utsagnslogikk.
- Ved å erstatte  $A$  med  $x \in A$  oppfattet som en utsagnsvariabel, kan vi spisse  $\cup$  til  $\vee$ ,  $\cap$  til  $\wedge$  og erstatte komplement  $\bar{A}$  med  $\neg(x \in A)$ , og vi får en utsagnslogisk formel.
- Det er da naturlig å erstatte  $\emptyset$  med **F** og  $\mathcal{E}$  med **T**.

# Boolsk algebra

- Det er en nær sammenheng mellom Boolsk mengdealgebra og utsagnslogikk.
- Ved å erstatte  $A$  med  $x \in A$  oppfattet som en utsagnsvariabel, kan vi spisse  $\cup$  til  $\vee$ ,  $\cap$  til  $\wedge$  og erstatte komplement  $\bar{A}$  med  $\neg(x \in A)$ , og vi får en utsagnslogisk formel.
- Det er da naturlig å erstatte  $\emptyset$  med **F** og  $\mathcal{E}$  med **T**.
- To mengder, definert fra **mengdevariable**  $A, B$  og liknende ved hjelp av **union**, **snitt** og **komplement** vil alltid være like nøyaktig når oversettelsene er logisk ekvivalente.

# Boolsk algebra

# Boolsk algebra

- Tabell 5.1 på side 80 (79 i Utgave 2) i læreboka lister noen Boolske identiteter.

# Boolsk algebra

- Tabell 5.1 på side 80 (79 i Utgave 2) i læreboka lister noen Boolske identiteter.
- De har sine paralleller i tabellen på side 56 (55) over logikkens lover.

# Boolsk algebra

- Tabell 5.1 på side 80 (79 i Utgave 2) i læreboka lister noen Boolske identiteter.
- De har sine paralleller i tabellen på side 56 (55) over logikkens lover.
- Vi skal ikke drille regning med disse Boolske identitetene.

# En digresjon: Russells Paradoks

## En digresjon: Russells Paradoks

- Hvis vi hadde kunnet snakke om mengden av alle mengder, hadde vi hatt en grunn mindre til å bringe inn den universelle mengden  $\mathcal{E}$ .



# En digresjon: Russells Paradoks

- Hvis vi hadde kunnet snakke om mengden av alle mengder, hadde vi hatt en grunn mindre til å bringe inn den universelle mengden  $\mathcal{E}$ .
- Antagelsen om at det fins en mengde som har alle mengder som elementer, leder imidlertid til en motsigelse som kalles **Russells Paradoks**.

# En digresjon: Russells Paradoks

- Hvis vi hadde kunnet snakke om mengden av alle mengder, hadde vi hatt en grunn mindre til å bringe inn den universelle mengden  $\mathcal{E}$ .
- Antagelsen om at det fins en mengde som har alle mengder som elementer, leder imidlertid til en motsigelse som kalles **Russells Paradoks**.
- Vi gir beviset for Russells Paradoks som en oppgave med hint.

# En digresjon: Russells Paradoks

# En digresjon: Russells Paradoks

## Oppgave

# En digresjon: Russells Paradoks

## Oppgave

- Anta at  $X$  er en mengde, og at for alle mengder  $Y$  vil  $Y \in X$ .

# En digresjon: Russells Paradoks

## Oppgave

- Anta at  $X$  er en mengde, og at for alle mengder  $Y$  vil  $Y \in X$ .
- La  $Z = \{Y \in X : Y \notin Y\}$ .

# En digresjon: Russells Paradoks

## Oppgave

- Anta at  $X$  er en mengde, og at for alle mengder  $Y$  vil  $Y \in X$ .
- La  $Z = \{Y \in X : Y \notin Y\}$ .
- Da er  $Z \in X$ .

# En digresjon: Russells Paradoks

## Oppgave

- Anta at  $X$  er en mengde, og at for alle mengder  $Y$  vil  $Y \in X$ .
- La  $Z = \{Y \in X : Y \notin Y\}$ .
- Da er  $Z \in X$ .
- Vis at hvis  $Z \in Z$  så vil  $Z \notin Z$ .



# En digresjon: Russells Paradoks

## Oppgave

- Anta at  $X$  er en mengde, og at for alle mengder  $Y$  vil  $Y \in X$ .
- La  $Z = \{Y \in X : Y \notin Y\}$ .
- Da er  $Z \in X$ .
- Vis at hvis  $Z \in Z$  så vil  $Z \notin Z$ .
- Vis at hvis  $Z \notin Z$  så vil  $Z \in Z$ .

# En digresjon: Russells Paradoks

## Oppgave

- Anta at  $X$  er en mengde, og at for alle mengder  $Y$  vil  $Y \in X$ .
- La  $Z = \{Y \in X : Y \notin Y\}$ .
- Da er  $Z \in X$ .
- Vis at hvis  $Z \in Z$  så vil  $Z \notin Z$ .
- Vis at hvis  $Z \notin Z$  så vil  $Z \in Z$ .
- Forklar hvorfor dette viser at mengden  $X$  ikke kan finnes.

# Digital representasjon av mengder

# Digital representasjon av mengder

- I utgangspunktet skal det ikke spille noen rolle i hvilken rekkefølge man skriver opp elementene i en mengde.

# Digital representasjon av mengder

- I utgangspunktet skal det ikke spille noen rolle i hvilken rekkefølge man skriver opp elementene i en mengde.
- Hvis man imidlertid har behov for å representere visse mengder digitalt, må man velge seg en rekkefølge på elementene i den universelle mengden  $\mathcal{E}$ .

# Digital representasjon av mengder

- I utgangspunktet skal det ikke spille noen rolle i hvilken rekkefølge man skriver opp elementene i en mengde.
- Hvis man imidlertid har behov for å representere visse mengder digitalt, må man velge seg en rekkefølge på elementene i den universelle mengden  $\mathcal{E}$ .
- Vi skal nå se på en metode for digital representasjon av mengder som virker når  $\mathcal{E}$  er endelig.

# Digital representasjon av mengder

- I utgangspunktet skal det ikke spille noen rolle i hvilken rekkefølge man skriver opp elementene i en mengde.
- Hvis man imidlertid har behov for å representere visse mengder digitalt, må man velge seg en rekkefølge på elementene i den universelle mengden  $\mathcal{E}$ .
- Vi skal nå se på en metode for digital representasjon av mengder som virker når  $\mathcal{E}$  er endelig.
- Hvis  $\mathcal{E}$  er en uendelig mengde, må man enten velge en annen metode eller gi opp.

# Digital representasjon av mengder



# Digital representasjon av mengder

## Definisjon

# Digital representasjon av mengder

## Definisjon

- Anta at  $\mathcal{E}$  har  $k$  elementer i rekkefølge

$$\{a_1, \dots, a_k\}.$$

# Digital representasjon av mengder

## Definisjon

- Anta at  $\mathcal{E}$  har  $k$  elementer i rekkefølge

$$\{a_1, \dots, a_k\}.$$

- La  $A \subseteq \mathcal{E}$

# Digital representasjon av mengder

## Definisjon

- Anta at  $\mathcal{E}$  har  $k$  elementer i rekkefølge

$$\{a_1, \dots, a_k\}.$$

- La  $A \subseteq \mathcal{E}$
- Vi representerer  $A$  som informasjon på  $k$  bit i rekkefølge, ved at bit nummer  $i$  får verdien 1 hvis og bare hvis  $a_i \in A$ .

# Digital representasjon av mengder

# Digital representasjon av mengder

- Ved denne måten å representere mengder på blir det svært enkelt å etterlikne de Boolske operasjonene.

# Digital representasjon av mengder

- Ved denne måten å representere mengder på blir det svært enkelt å etterlikne de Boolske operasjonene.
- Snitt svarer til punktvis multiplikasjon, union svarer til det å ta maksimumsverdien punktvis og komplement svarer til å skifte verdi i alle bit.

# Digital representasjon av mengder

- Ved denne måten å representere mengder på blir det svært enkelt å etterlikne de Boolske operasjonene.
- Snitt svarer til punktvis multiplikasjon, union svarer til det å ta maksimumsverdien punktvis og komplement svarer til å skifte verdi i alle bit.
- Vi kommer ikke til å jobbe så mye med digital representasjon av mengder.



# Digital representasjon av mengder

- Ved denne måten å representere mengder på blir det svært enkelt å etterlikne de Boolske operasjonene.
- Snitt svarer til punktvis multiplikasjon, union svarer til det å ta maksimumsverdien punktvis og komplement svarer til å skifte verdi i alle bit.
- Vi kommer ikke til å jobbe så mye med digital representasjon av mengder.
- Når vi kommer til kompleksitetsteori, og vi spør om kompleksiteten til et problem som involverer mengder, trenger vi å vite hvordan mengder representeres digitalt.

# Kardinaltall

# Kardinaltall

- Hvis vi i noen sammenhenger ønsker å bruke digitale representasjoner av mengder, er det viktig at  $\varepsilon$  ikke får lov til å være for stor.

# Kardinaltall

- Hvis vi i noen sammenhenger ønsker å bruke digitale representasjoner av mengder, er det viktig at  $\varepsilon$  ikke får lov til å være for stor.
- $10^{10^{10}}$  er lett å skrive, men foreløpig har vi ingen datamaskin med så mange bit.

# Kardinaltall

- Hvis vi i noen sammenhenger ønsker å bruke digitale representasjoner av mengder, er det viktig at  $\varepsilon$  ikke får lov til å være for stor.
- $10^{10^{10}}$  er lett å skrive, men foreløpig har vi ingen datamaskin med så mange bit.
- For å kunne følge med på hvor store mengder vi opererer med, og for å kunne resonnerer omkring størrelse på mengder, er det en fordel med en **notasjon** for størrelsen av mengder.

# Kardinaltall

- Hvis vi i noen sammenhenger ønsker å bruke digitale representasjoner av mengder, er det viktig at  $\varepsilon$  ikke får lov til å være for stor.
- $10^{10^{10}}$  er lett å skrive, men foreløpig har vi ingen datamaskin med så mange bit.
- For å kunne følge med på hvor store mengder vi opererer med, og for å kunne resonnerer omkring størrelse på mengder, er det en fordel med en **notasjon** for størrelsen av mengder.
- Det er dette vi vil fange opp i begrepet **kardinaltall**.

# Kardinaltall

# Kardinaltall

## Definisjon



# Kardinaltall

## Definisjon

- La  $A$  være en endelig mengde.

# Kardinaltall

## Definisjon

- La  $A$  være en endelig mengde.
- Med **kardinaltallet til  $A$**  mener vi antall elementer i  $A$ .

# Kardinaltall

## Definisjon

- La  $A$  være en endelig mengde.
- Med **kardinaltallet til  $A$**  mener vi antall elementer i  $A$ .
- Vi skriver  $|A|$  for kardinaltallet til  $A$ .

# Kardinaltall

## Definisjon

- La  $A$  være en endelig mengde.
- Med **kardinaltallet til  $A$**  mener vi antall elementer i  $A$ .
- Vi skriver  $|A|$  for kardinaltallet til  $A$ .

## Eksempel

# Kardinaltall

## Definisjon

- La  $A$  være en endelig mengde.
- Med **kardinaltallet til  $A$**  mener vi antall elementer i  $A$ .
- Vi skriver  $|A|$  for kardinaltallet til  $A$ .

## Eksempel

- Hvis  $A = \{2, 3, 17, 5, 23, 12, 15\}$  er  $|A| = 7$ .

# Kardinaltall

## Definisjon

- La  $A$  være en endelig mengde.
- Med **kardinaltallet til  $A$**  mener vi antall elementer i  $A$ .
- Vi skriver  $|A|$  for kardinaltallet til  $A$ .

## Eksempel

- Hvis  $A = \{2, 3, 17, 5, 23, 12, 15\}$  er  $|A| = 7$ .
- Hvis  $B = \{n \in \mathbb{N} : 2n + 1 < 17\}$  er  $|B| = 7$ .

# Kardinaltall

## Definisjon

- La  $A$  være en endelig mengde.
- Med **kardinaltallet til  $A$**  mener vi antall elementer i  $A$ .
- Vi skriver  $|A|$  for kardinaltallet til  $A$ .

## Eksempel

- Hvis  $A = \{2, 3, 17, 5, 23, 12, 15\}$  er  $|A| = 7$ .
- Hvis  $B = \{n \in \mathbb{N} : 2n + 1 < 17\}$  er  $|B| = 7$ .
- Hvis  $C = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\}$  er  $|C| = 3$ .

# Kardinaltall

## Definisjon

- La  $A$  være en endelig mengde.
- Med **kardinaltallet til  $A$**  mener vi antall elementer i  $A$ .
- Vi skriver  $|A|$  for kardinaltallet til  $A$ .

## Eksempel

- Hvis  $A = \{2, 3, 17, 5, 23, 12, 15\}$  er  $|A| = 7$ .
- Hvis  $B = \{n \in \mathbb{N} : 2n + 1 < 17\}$  er  $|B| = 7$ .
- Hvis  $C = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\}$  er  $|C| = 3$ .
- Hvis  $D = \{x \in \mathbb{J} : x^2 = 64\}$  er  $|D| = 2$ .



# Kardinaltall

# Kardinaltall

Vi skal se på en enkel setning om kardinalitet som kan bli nyttig i avsnittet om kombinatorikk.

# Kardinaltall

Vi skal se på en enkel setning om kardinalitet som kan bli nyttig i avsnittet om kombinatorikk.

Det er en setning som har sin parallell i sannsynlighetsteori, og i mange andre sammenhenger hvor man på en eller annen måte måler størrelse på mengder.

# Kardinaltall

Vi skal se på en enkel setning om kardinalitet som kan bli nyttig i avsnittet om kombinatorikk.

Det er en setning som har sin parallell i sannsynlighetsteori, og i mange andre sammenhenger hvor man på en eller annen måte måler størrelse på mengder.

## Teorem

# Kardinaltall

Vi skal se på en enkel setning om kardinalitet som kan bli nyttig i avsnittet om kombinatorikk.

Det er en setning som har sin parallell i sannsynlighetsteori, og i mange andre sammenhenger hvor man på en eller annen måte måler størrelse på mengder.

## Teorem

La  $A$  og  $B$  være to endelige mengder.

# Kardinaltall

Vi skal se på en enkel setning om kardinalitet som kan bli nyttig i avsnittet om kombinatorikk.

Det er en setning som har sin parallell i sannsynlighetsteori, og i mange andre sammenhenger hvor man på en eller annen måte måler størrelse på mengder.

## Teorem

La  $A$  og  $B$  være to endelige mengder.

Da er

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$

# Kardinaltall

# Kardinaltall

## Bevis



## Bevis

Først observerer vi at hvis  $C$ ,  $D$  og  $E$  er vilkårlige disjunkte mengder, så vil

$$|C \cup D \cup E| = |C| + |D| + |E|.$$

## Bevis

Først observerer vi at hvis  $C$ ,  $D$  og  $E$  er vilkårlige disjunkte mengder, så vil

$$|C \cup D \cup E| = |C| + |D| + |E|.$$

Så lar vi  $C = A - B$ ,  $D = A \cap B$  og  $E = B - A$ .

## Bevis

Først observerer vi at hvis  $C$ ,  $D$  og  $E$  er vilkårlige disjunkte mengder, så vil

$$|C \cup D \cup E| = |C| + |D| + |E|.$$

Så lar vi  $C = A - B$ ,  $D = A \cap B$  og  $E = B - A$ .

Fra Venn-diagrammet ser vi at disse er disjunkte.

## Bevis

Først observerer vi at hvis  $C$ ,  $D$  og  $E$  er vilkårlige disjunkte mengder, så vil

$$|C \cup D \cup E| = |C| + |D| + |E|.$$

Så lar vi  $C = A - B$ ,  $D = A \cap B$  og  $E = B - A$ .

Fra Venn-diagrammet ser vi at disse er disjunkte.

Da er

## Bevis

Først observerer vi at hvis  $C$ ,  $D$  og  $E$  er vilkårlige disjunkte mengder, så vil

$$|C \cup D \cup E| = |C| + |D| + |E|.$$

Så lar vi  $C = A - B$ ,  $D = A \cap B$  og  $E = B - A$ .

Fra Venn-diagrammet ser vi at disse er disjunkte.

Da er

- $|A \cup B| = |C| + |D| + |E|$

## Bevis

Først observerer vi at hvis  $C$ ,  $D$  og  $E$  er vilkårlige disjunkte mengder, så vil

$$|C \cup D \cup E| = |C| + |D| + |E|.$$

Så lar vi  $C = A - B$ ,  $D = A \cap B$  og  $E = B - A$ .

Fra Venn-diagrammet ser vi at disse er disjunkte.

Da er

- $|A \cup B| = |C| + |D| + |E|$
- $|A| = |C| + |D|$

## Bevis

Først observerer vi at hvis  $C$ ,  $D$  og  $E$  er vilkårlige disjunkte mengder, så vil

$$|C \cup D \cup E| = |C| + |D| + |E|.$$

Så lar vi  $C = A - B$ ,  $D = A \cap B$  og  $E = B - A$ .

Fra Venn-diagrammet ser vi at disse er disjunkte.

Da er

- $|A \cup B| = |C| + |D| + |E|$
- $|A| = |C| + |D|$
- $|B| = |D| + |E|$

## Bevis

Først observerer vi at hvis  $C$ ,  $D$  og  $E$  er vilkårlige disjunkte mengder, så vil

$$|C \cup D \cup E| = |C| + |D| + |E|.$$

Så lar vi  $C = A - B$ ,  $D = A \cap B$  og  $E = B - A$ .

Fra Venn-diagrammet ser vi at disse er disjunkte.

Da er

- $|A \cup B| = |C| + |D| + |E|$
- $|A| = |C| + |D|$
- $|B| = |D| + |E|$

Teoremet følger da ved enkel regning.



## Bevis

Først observerer vi at hvis  $C$ ,  $D$  og  $E$  er vilkårlige disjunkte mengder, så vil

$$|C \cup D \cup E| = |C| + |D| + |E|.$$

Så lar vi  $C = A - B$ ,  $D = A \cap B$  og  $E = B - A$ .

Fra Venn-diagrammet ser vi at disse er disjunkte.

Da er

- $|A \cup B| = |C| + |D| + |E|$
- $|A| = |C| + |D|$
- $|B| = |D| + |E|$

Teoremet følger da ved enkel regning.

Til de som ikke kom til forelesningen: Noe ble forklart ved Venn-diagrammer på tavlen.

# Kardinaltall

## Eksempel

## Eksempel

- Hvis alle 16 spillerne på et håndball-lag må kunne brukes i angrep eller forsvar, og vi vet at 7 av spillerne kan brukes i begge posisjoner og at 12 av spillerne kan brukes i forsvar, setter vi opp en likning for antall spillere som kan brukes i angrep:

## Eksempel

- Hvis alle 16 spillerne på et håndball-lag må kunne brukes i angrep eller forsvar, og vi vet at 7 av spillerne kan brukes i begge posisjoner og at 12 av spillerne kan brukes i forsvar, setter vi opp en likning for antall spillere som kan brukes i angrep:



$$16 + 7 = x + 12.$$

## Eksempel

- Hvis alle 16 spillerne på et håndball-lag må kunne brukes i angrep eller forsvar, og vi vet at 7 av spillerne kan brukes i begge posisjoner og at 12 av spillerne kan brukes i forsvar, setter vi opp en likning for antall spillere som kan brukes i angrep:



$$16 + 7 = x + 12.$$

- Det gir at 11 spillere kan brukes i angrepsspillet.

## Eksempel

- Hvis alle 16 spillerne på et håndball-lag må kunne brukes i angrep eller forsvar, og vi vet at 7 av spillerne kan brukes i begge posisjoner og at 12 av spillerne kan brukes i forsvar, setter vi opp en likning for antall spillere som kan brukes i angrep:



$$16 + 7 = x + 12.$$

- Det gir at 11 spillere kan brukes i angrepsspillet.
- Fra Venn-diagrammet ser vi at det vil være fire spillere som bare kan brukes i angrep, og fem spillere som bare kan brukes i forsvar.

# Kardinaltall



# Kardinaltall

- Den tyske matematikeren *Georg Cantor* utviklet en teori for kardinaltallet til en uendelig mengde også.

# Kardinaltall

- Den tyske matematikeren *Georg Cantor* utviklet en teori for kardinaltallet til en uendelig mengde også.
- Dette skjedde i siste halvdel av 1800-tallet.

# Kardinaltall

- Den tyske matematikeren *Georg Cantor* utviklet en teori for kardinaltallet til en uendelig mengde også.
- Dette skjedde i siste halvdel av 1800-tallet.
- Ut fra Cantors definisjon fins det like mange rasjonale tall og hele tall som naturlige tall, mens det fins ekte flere reelle tall.

# Kardinaltall

- Den tyske matematikeren *Georg Cantor* utviklet en teori for kardinaltallet til en uendelig mengde også.
- Dette skjedde i siste halvdel av 1800-tallet.
- Ut fra Cantors definisjon fins det like mange rasjonale tall og hele tall som naturlige tall, mens det fins ekte flere reelle tall.
- Vi skal begrense oss til kardinalitet av endelige mengder.

# Kardinaltall

- Den tyske matematikeren *Georg Cantor* utviklet en teori for kardinaltallet til en uendelig mengde også.
- Dette skjedde i siste halvdel av 1800-tallet.
- Ut fra Cantors definisjon fins det like mange rasjonale tall og hele tall som naturlige tall, mens det fins ekte flere reelle tall.
- Vi skal begrense oss til kardinalitet av endelige mengder.
- Selv om datamaskiner av natur bare kan håndtere endelig mye informasjon, har imidlertid studiet av uendelige mengder også en plass i informatikken.

# Kardinaltall

- Den tyske matematikeren *Georg Cantor* utviklet en teori for kardinaltallet til en uendelig mengde også.
- Dette skjedde i siste halvdel av 1800-tallet.
- Ut fra Cantors definisjon fins det like mange rasjonale tall og hele tall som naturlige tall, mens det fins ekte flere reelle tall.
- Vi skal begrense oss til kardinalitet av endelige mengder.
- Selv om datamaskiner av natur bare kan håndtere endelig mye informasjon, har imidlertid studiet av uendelige mengder også en plass i informatikken.
- Dette faller ofte utenfor rammen til **diskret matematikk** og derfor utenfor pensum i **MAT1030**.

# Kardinaltall

## Eksempel



## Eksempel

a) La  $A = \{0, 1, 2\}$ .

## Eksempel

a) La  $A = \{0, 1, 2\}$ .

Da har  $A$  8 delmengder:  $\emptyset$ ,  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 2\}$  og  $\{0, 1, 2\}$ .

## Eksempel

a) La  $A = \{0, 1, 2\}$ .

Da har  $A$  8 delmengder:  $\emptyset$ ,  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 2\}$  og  $\{0, 1, 2\}$ .

Disse er skrevet opp i en usystematisk rekkefølge.

## Eksempel

a) La  $A = \{0, 1, 2\}$ .

Da har  $A$  8 delmengder:  $\emptyset$ ,  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 2\}$  og  $\{0, 1, 2\}$ .

Disse er skrevet opp i en usystematisk rekkefølge.

En mer systematisk måte vil være først å skrive den ene delmengden av  $\emptyset$ :  $\emptyset$ ,

## Eksempel

a) La  $A = \{0, 1, 2\}$ .

Da har  $A$  8 delmengder:  $\emptyset$ ,  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 2\}$  og  $\{0, 1, 2\}$ .

Disse er skrevet opp i en usystematisk rekkefølge.

En mer systematisk måte vil være først å skrive den ene delmengden av  $\emptyset$ :  $\emptyset$ ,

så resten av delmengdene av  $\{0\}$ :  $\{0\}$

## Eksempel

a) La  $A = \{0, 1, 2\}$ .

Da har  $A$  8 delmengder:  $\emptyset$ ,  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 2\}$  og  $\{0, 1, 2\}$ .

Disse er skrevet opp i en usystematisk rekkefølge.

En mer systematisk måte vil være først å skrive den ene delmengden av  $\emptyset$ :  $\emptyset$ ,

så resten av delmengdene av  $\{0\}$ :  $\{0\}$

så resten av delmengdene av  $\{0, 1\}$ :  $\{1\}$  og  $\{0, 1\}$

## Eksempel

a) La  $A = \{0, 1, 2\}$ .

Da har  $A$  8 delmengder:  $\emptyset$ ,  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 2\}$  og  $\{0, 1, 2\}$ .

Disse er skrevet opp i en usystematisk rekkefølge.

En mer systematisk måte vil være først å skrive den ene delmengden av  $\emptyset$ :  $\emptyset$ ,

så resten av delmengdene av  $\{0\}$ :  $\{0\}$

så resten av delmengdene av  $\{0, 1\}$ :  $\{1\}$  og  $\{0, 1\}$

og til slutt resten av delmengdene av  $\{0, 1, 2\}$ :  $\{2\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{1, 2\}$  og  $\{0, 1, 2\}$

# Kardinaltall



## Eksempel (Fortsatt)

## Eksempel (Fortsatt)

Den naturlige rekkefølgen blir da

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

## Eksempel (Fortsatt)

Den naturlige rekkefølgen blir da

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

- b) For å liste opp alle delmengder av  $\{0, 1, 2, 3\}$  lister vi først opp alle delmengder av  $\{0, 1, 2\}$  og deretter alle nye delmengder, ved å legge 3 til en av de åtte første.

## Eksempel (Fortsatt)

Den naturlige rekkefølgen blir da

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

- b) For å liste opp alle delmengder av  $\{0, 1, 2, 3\}$  lister vi først opp alle delmengder av  $\{0, 1, 2\}$  og deretter alle nye delmengder, ved å legge 3 til en av de åtte første.

Det gir

## Eksempel (Fortsatt)

Den naturlige rekkefølgen blir da

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

- b) For å liste opp alle delmengder av  $\{0, 1, 2, 3\}$  lister vi først opp alle delmengder av  $\{0, 1, 2\}$  og deretter alle nye delmengder, ved å legge 3 til en av de åtte første.

Det gir

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\},$$

## Eksempel (Fortsatt)

Den naturlige rekkefølgen blir da

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

- b) For å liste opp alle delmengder av  $\{0, 1, 2, 3\}$  lister vi først opp alle delmengder av  $\{0, 1, 2\}$  og deretter alle nye delmengder, ved å legge 3 til en av de åtte første.

Det gir

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\},$$

$$\{3\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$$

# Potensmengder

# Potensmengder

## Definisjon



# Potensmengder

## Definisjon

- La  $A$  være en mengde.

# Potensmengder

## Definisjon

- La  $A$  være en mengde.
- Med **potensmengden** til  $A$  mener vi mengden av alle delmengder av  $A$ .

# Potensmengder

## Definisjon

- La  $A$  være en mengde.
- Med **potensmengden** til  $A$  mener vi mengden av alle delmengder av  $A$ .

## Merk

# Potensmengder

## Definisjon

- La  $A$  være en mengde.
- Med **potensmengden** til  $A$  mener vi mengden av alle delmengder av  $A$ .

## Merk

- Hvis  $A$  er en mengde og  $B \subseteq A$  er en vilkårlig delmengde, vil vi for hver  $x \in A$  ha to muligheter,  $x \in B$  og  $x \notin B$ .

# Potensmengder

## Definisjon

- La  $A$  være en mengde.
- Med **potensmengden** til  $A$  mener vi mengden av alle delmengder av  $A$ .

## Merk

- Hvis  $A$  er en mengde og  $B \subseteq A$  er en vilkårlig delmengde, vil vi for hver  $x \in A$  ha to muligheter,  $x \in B$  og  $x \notin B$ .
- En konsekvens er at hvis  $A$  er endelig vil potensmengden til  $A$  ha  $2^{|A|}$  elementer.

# Potensmengder

## Definisjon

- La  $A$  være en mengde.
- Med **potensmengden** til  $A$  mener vi mengden av alle delmengder av  $A$ .

## Merk

- Hvis  $A$  er en mengde og  $B \subseteq A$  er en vilkårlig delmengde, vil vi for hver  $x \in A$  ha to muligheter,  $x \in B$  og  $x \notin B$ .
- En konsekvens er at hvis  $A$  er endelig vil potensmengden til  $A$  ha  $2^{|A|}$  elementer.
- Dette vil ofte bety at det vil ta alt for lang tid å gjennomføre naive algoritmer.

# Potensmengder

# Potensmengder

## Eksempel



# Potensmengder

## Eksempel

- La  $A$  være en endelig mengde av naturlige tall.

# Potensmengder

## Eksempel

- La  $A$  være en endelig mengde av naturlige tall.
- Vi lar  $\sum A$  bety summen av alle tallene i  $A$ .

# Potensmengder

## Eksempel

- La  $A$  være en endelig mengde av naturlige tall.
- Vi lar  $\sum A$  bety summen av alle tallene i  $A$ .
- **Partisjonsproblemet** er om det fins delmengder  $B$  og  $C$  av  $A$  som er slik at

# Potensmengder

## Eksempel

- La  $A$  være en endelig mengde av naturlige tall.
- Vi lar  $\sum A$  bety summen av alle tallene i  $A$ .
- **Partisjonsproblemet** er om det fins delmengder  $B$  og  $C$  av  $A$  som er slik at
  1.  $A = B \cup C$

# Potensmengder

## Eksempel

- La  $A$  være en endelig mengde av naturlige tall.
- Vi lar  $\sum A$  bety summen av alle tallene i  $A$ .
- **Partisjonsproblemet** er om det fins delmengder  $B$  og  $C$  av  $A$  som er slik at
  1.  $A = B \cup C$
  2.  $\emptyset = B \cap C$  ( de er **disjunkte**)

# Potensmengder

## Eksempel

- La  $A$  være en endelig mengde av naturlige tall.
- Vi lar  $\sum A$  bety summen av alle tallene i  $A$ .
- **Partisjonsproblemet** er om det fins delmengder  $B$  og  $C$  av  $A$  som er slik at
  1.  $A = B \cup C$
  2.  $\emptyset = B \cap C$  ( de er **disjunkte**)
  3.  $\sum B = \sum C$

# Potensmengder

## Eksempel

- La  $A$  være en endelig mengde av naturlige tall.
- Vi lar  $\sum A$  bety summen av alle tallene i  $A$ .
- **Partisjonsproblemet** er om det fins delmengder  $B$  og  $C$  av  $A$  som er slik at
  1.  $A = B \cup C$
  2.  $\emptyset = B \cap C$  ( de er **disjunkte**)
  3.  $\sum B = \sum C$
- Den første strategien for å løse dette problemet kan være å liste opp alle par  $B \subseteq A$  og  $C = A - B$ , og sjekke

## Eksempel

- La  $A$  være en endelig mengde av naturlige tall.
- Vi lar  $\sum A$  bety summen av alle tallene i  $A$ .
- **Partisjonsproblemet** er om det fins delmengder  $B$  og  $C$  av  $A$  som er slik at
  1.  $A = B \cup C$
  2.  $\emptyset = B \cap C$  ( de er **disjunkte**)
  3.  $\sum B = \sum C$
- Den første strategien for å løse dette problemet kan være å liste opp alle par  $B \subseteq A$  og  $C = A - B$ , og sjekke, men hvis  $A$  har 1000 elementer, er ikke dette praktisk gjennomførbart.



## Eksempel

- La  $A$  være en endelig mengde av naturlige tall.
- Vi lar  $\sum A$  bety summen av alle tallene i  $A$ .
- **Partisjonsproblemet** er om det fins delmengder  $B$  og  $C$  av  $A$  som er slik at
  1.  $A = B \cup C$
  2.  $\emptyset = B \cap C$  ( de er **disjunkte**)
  3.  $\sum B = \sum C$
- Den første strategien for å løse dette problemet kan være å liste opp alle par  $B \subseteq A$  og  $C = A - B$ , og sjekke, men hvis  $A$  har 1000 elementer, er ikke dette praktisk gjennomførbart.
- Ingen vet per i dag om det fins en vesentlig raskere metode for å løse partisjonsproblemet generelt.

## Eksempel

- La  $A$  være en endelig mengde av naturlige tall.
- Vi lar  $\sum A$  bety summen av alle tallene i  $A$ .
- **Partisjonsproblemet** er om det fins delmengder  $B$  og  $C$  av  $A$  som er slik at
  1.  $A = B \cup C$
  2.  $\emptyset = B \cap C$  ( de er **disjunkte**)
  3.  $\sum B = \sum C$
- Den første strategien for å løse dette problemet kan være å liste opp alle par  $B \subseteq A$  og  $C = A - B$ , og sjekke, men hvis  $A$  har 1000 elementer, er ikke dette praktisk gjennomførbart.
- Ingen vet per i dag om det fins en vesentlig raskere metode for å løse partisjonsproblemet generelt.
- Partisjonsproblemet er et eksempel på et NP-komplett problem.

# Potensmengder

# Potensmengder

Merk

# Potensmengder

## Merk

- Potensmengden til  $A$  er definert selv om  $A$  er uendelig.

# Potensmengder

## Merk

- Potensmengden til  $A$  er definert selv om  $A$  er uendelig.
- I det tilfellet er ikke alle egenskapene ved potensmengder fullstendig klarlagt ennå.

# Potensmengder

## Merk

- Potensmengden til  $A$  er definert selv om  $A$  er uendelig.
- I det tilfellet er ikke alle egenskapene ved potensmengder fullstendig klarlagt ennå.
- Vi ledes langt ut over rammene for diskret matematikk om vi prøver å forstå potensmengden til en uendelig mengde.

# Potensmengder

## Merk

- Potensmengden til  $A$  er definert selv om  $A$  er uendelig.
- I det tilfellet er ikke alle egenskapene ved potensmengder fullstendig klarlagt ennå.
- Vi ledes langt ut over rammene for diskret matematikk om vi prøver å forstå potensmengden til en uendelig mengde.
- Cantor viste at i en viss forstand er potensmengden til  $A$  alltid ekte større enn  $A$ .



# Ordnete par

# Ordnete par

- Vi har brukt mengden  $\mathbb{R}^2$  av tallpar i tidligere eksempler.

# Ordnete par

- Vi har brukt mengden  $\mathbb{R}^2$  av **tallpar** i tidligere eksempler.
- Alle vet at det er forskjell på tallparene  $(2, 3)$  og  $(3, 2)$  i  $\mathbb{R}^2$ .

# Ordnete par

- Vi har brukt mengden  $\mathbb{R}^2$  av **tallpar** i tidligere eksempler.
- Alle vet at det er forskjell på tallparene  $(2, 3)$  og  $(3, 2)$  i  $\mathbb{R}^2$ .
- Det betyr at rekkefølgen på tallene i paret spiller en rolle.

# Ordnete par

- Vi har brukt mengden  $\mathbb{R}^2$  av **tallpar** i tidligere eksempler.
- Alle vet at det er forskjell på tallparene  $(2, 3)$  og  $(3, 2)$  i  $\mathbb{R}^2$ .
- Det betyr at rekkefølgen på tallene i paret spiller en rolle.
- Et slikt par kaller vi et **ordnet par**.

# Ordnete par

# Ordnete par

- Det er ikke bare tall som kan opptre i par.

# Ordnete par

- Det er ikke bare tall som kan opptre i par.
- Vi kan for eksempel skrive at



# Ordnete par

- Det er ikke bare tall som kan opptre i par.
- Vi kan for eksempel skrive at

Per og Kari er ektefeller

# Ordnete par

- Det er ikke bare tall som kan opptre i par.
- Vi kan for eksempel skrive at

Per og Kari er ektefeller

og vi mener så absolutt at de utgjør et par.

# Ordnete par

- Det er ikke bare tall som kan opptre i par.
- Vi kan for eksempel skrive at

Per og Kari er ektefeller

og vi mener så absolutt at de utgjør et par.

- I dette tilfellet betyr ikke rekkefølgen noe, men skriver vi

# Ordnete par

- Det er ikke bare tall som kan opptre i par.
- Vi kan for eksempel skrive at

Per og Kari er ektefeller

og vi mener så absolutt at de utgjør et par.

- I dette tilfellet betyr ikke rekkefølgen noe, men skriver vi  
Kari er kona til Per

# Ordnete par

- Det er ikke bare tall som kan opptre i par.
- Vi kan for eksempel skrive at

Per og Kari er ektefeller

og vi mener så absolutt at de utgjør et par.

- I dette tilfellet betyr ikke rekkefølgen noe, men skriver vi

Kari er kona til Per

kan vi ikke erstatte det med

# Ordnete par

- Det er ikke bare tall som kan opptre i par.
- Vi kan for eksempel skrive at

Per og Kari er ektefeller

og vi mener så absolutt at de utgjør et par.

- I dette tilfellet betyr ikke rekkefølgen noe, men skriver vi

Kari er kona til Per

kan vi ikke erstatte det med

Per er kona til Kari.

# Ordnete par

# Ordnete par

- Vi trenger begrepet **ordnet par** for å kunne snakke presist og generelt om visse former for sammenhenger vi kan finne mellom to objekter.



# Ordnete par

- Vi trenger begrepet **ordnet par** for å kunne snakke presist og generelt om visse former for sammenhenger vi kan finne mellom to objekter.
- Disse objektene kan være tall i en tallmengde.

# Ordnete par

- Vi trenger begrepet **ordnet par** for å kunne snakke presist og generelt om visse former for sammenhenger vi kan finne mellom to objekter.
- Disse objektene kan være tall i en tallmengde.
- De kan imidlertid også være data i en base, data som representerer personer, hendelser, adresser, yrker og mye annet det kan være behov for å registrere.

# Ordnete par

- Vi trenger begrepet **ordnet par** for å kunne snakke presist og generelt om visse former for sammenhenger vi kan finne mellom to objekter.
- Disse objektene kan være tall i en tallmengde.
- De kan imidlertid også være data i en base, data som representerer personer, hendelser, adresser, yrker og mye annet det kan være behov for å registrere.
- Derfor vil vi legge en helt generell definisjon til grunn, når vi definerer hva som menes med et ordnet par.

# Ordnete par

# Ordnete par

## Definisjon

# Ordnete par

## Definisjon

La  $a$  og  $b$  være to objekter.

# Ordnete par

## Definisjon

La  $a$  og  $b$  være to objekter.

Det **ordnede paret**  $(a, b)$  av  $a$  og  $b$  er  $a$  og  $b$  skrevet i rekkefølge.

# Ordnete par

## Definisjon

La  $a$  og  $b$  være to objekter.

Det **ordnede paret**  $(a, b)$  av  $a$  og  $b$  er  $a$  og  $b$  skrevet i rekkefølge.

To ordnede par  $(a, b)$  og  $(c, d)$  er **like** hvis  $a = c$  og  $b = d$ .



# Ordnete par

## Definisjon

La  $a$  og  $b$  være to objekter.

Det **ordnede par**  $(a, b)$  av  $a$  og  $b$  er  $a$  og  $b$  skrevet i rekkefølge.

To ordnede par  $(a, b)$  og  $(c, d)$  er **like** hvis  $a = c$  og  $b = d$ .

## Merk

# Ordnete par

## Definisjon

La  $a$  og  $b$  være to objekter.

Det **ordnede paret**  $(a, b)$  av  $a$  og  $b$  er  $a$  og  $b$  skrevet i rekkefølge.

To ordnede par  $(a, b)$  og  $(c, d)$  er **like** hvis  $a = c$  og  $b = d$ .

## Merk

- Vi har egentlig ikke sagt hva et ordnet par er for noe, bare knyttet det til at objektene settes i rekkefølge.

# Ordnete par

## Definisjon

La  $a$  og  $b$  være to objekter.

Det **ordnede par**  $(a, b)$  av  $a$  og  $b$  er  $a$  og  $b$  skrevet i rekkefølge.

To ordnede par  $(a, b)$  og  $(c, d)$  er **like** hvis  $a = c$  og  $b = d$ .

## Merk

- Vi har egentlig ikke sagt hva et ordnet par er for noe, bare knyttet det til at objektene settes i rekkefølge.
- Det er definisjonen av når to ordnede par er like som gir oss den ønskede matematiske presisjonen. Det knytter den abstrakte definisjonen opp til skrivemåten vi benytter.

# Ordnete par

# Ordnete par

## Definisjon

# Ordnete par

## Definisjon

La  $A$  og  $B$  være to mengder.

# Ordnete par

## Definisjon

La  $A$  og  $B$  være to mengder.

Med det **kartesiske produktet**  $A \times B$  av  $A$  og  $B$  mener vi

# Ordnete par

## Definisjon

La  $A$  og  $B$  være to mengder.

Med det **kartesiske produktet**  $A \times B$  av  $A$  og  $B$  mener vi

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$



# Ordnete par

## Definisjon

La  $A$  og  $B$  være to mengder.

Med det **kartesiske produktet**  $A \times B$  av  $A$  og  $B$  mener vi

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Betegnelsen henter sitt navn fra den franske matematikeren og filosofen René Descartes.

# Ordnete par

# Ordnete par

## Eksempel

# Ordnete par

## Eksempel

- La  $A$  være mengden av registrerte norske skøyteløpere og  $B$  være mengden av tider mellom 1.30.00 og 2.30.00.

# Ordnete par

## Eksempel

- La  $A$  være mengden av registrerte norske skøyteløpere og  $B$  være mengden av tider mellom 1.30.00 og 2.30.00.

Da vil registreringer av personlige rekorder på 1500m oppfattes som par i  $A \times B$

# Ordnete par

## Eksempel

- La  $A$  være mengden av registrerte norske skøyteløpere og  $B$  være mengden av tider mellom 1.30.00 og 2.30.00.  
Da vil registreringer av personlige rekorder på 1500m oppfattes som par i  $A \times B$
- Hvis  $A$  er mengden av ord skrevet med latinske bokstaver og  $B$  er mengden av sider på nettet, leter vi i prinsippet gjennom  $A \times B$  når vi søker etter nettsider hvor et bestemt ord forekommer.

# Ordnete par

## Eksempel

- La  $A$  være mengden av registrerte norske skøyteløpere og  $B$  være mengden av tider mellom 1.30.00 og 2.30.00.

Da vil registreringer av personlige rekorder på 1500m oppfattes som par i  $A \times B$

- Hvis  $A$  er mengden av ord skrevet med latinske bokstaver og  $B$  er mengden av sider på nettet, leter vi i prinsippet gjennom  $A \times B$  når vi søker etter nettsider hvor et bestemt ord forekommer.

I dette tilfellet er det klart at vi trenger å utvikle spesielle teknikker for å kunne gjøre dette på en effektiv måte, men utviklingen av slike teknikker starter med å forstå kompleksiteten av  $A \times B$ .

# Ordnete par



# Ordnete par

Hvis  $A$  og  $B$  er endelige mengder, vil

# Ordnete par

Hvis  $A$  og  $B$  er endelige mengder, vil

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

# Ordnete par

Hvis  $A$  og  $B$  er endelige mengder, vil

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

For de som har lært om matriser, ser vi sammenhengen med en  $n \times m$ -matrise.

# Ordnete par

Hvis  $A$  og  $B$  er endelige mengder, vil

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

For de som har lært om matriser, ser vi sammenhengen med en  $n \times m$ -matrise.

La  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  og  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ .

# Ordnete par

Hvis  $A$  og  $B$  er endelige mengder, vil

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

For de som har lært om matriser, ser vi sammenhengen med en  $n \times m$ -matrise.

La  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  og  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ .

Da kan vi skrive  $A \times B$  som:

# Ordnete par

# Ordnete par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (a_1, b_1) & \cdots \cdots & (a_1, b_m) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ (a_n, b_1) & \cdots \cdots & (a_n, b_m) \end{array} \right\}$$