

MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 5: Utsagnslogikk

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

2. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-02 14:08)



Kapittel 4: Logikk (fortsettelse)

Repetisjon

- Forrige gang snakket vi om *utsagn* og *predikater*, og vi innførte bindeordene (konnektivene) \wedge for **og**, \vee for **eller** og \neg for **ikke**.
- Vi så hvordan vi kunne definere disse tre konnektivene ved hjelp av **sannhetsverditabeller**.
- Spesielt poengterte vi at \vee står for *inklusiv eller*, det vil si at $p \vee q$ er sann når både p og q er sanne.
- Vi tar opp tråden der vi slapp den.

Sammensatte utsagn

Vi skal snu litt på rekkefølgen av stoffet i forhold til læreboka.

Ved å bruke konnektivene \wedge , \vee og \neg har vi gitt utsagnslogikken sin fulle uttrykkskraft.

De konnektivene vi skal se på senere, kan erstattes med sammensatte uttrykk hvor vi bare bruker \neg , \wedge og \vee .

Det er faktisk mulig å klare seg med bare \neg og \wedge eller bare med \neg og \vee , men da trenger vi sammensatte utsagn som det er vanskelig å lese.

For å fortsette denne diskusjonen, må vi se på hva vi mener med [sammensatte utsagn](#).

Sammensatte utsagn, bruk av parenteser

Vi har sett at $x \neq 0$ egentlig er en alternativ skrivemåte for $\neg(x = 0)$.

Anta at vi i en programmeringssammenheng har bruk for å uttrykke betingelsen

$$x \neq 0 \text{ og } y > 0.$$

Dette burde vi kunne skrive som

$$\neg(x = 0) \wedge y > 0.$$

Hvis p er utsagnet $x = 0$, q er utsagnet $y > 0$ og r er utsagnet $p \wedge q$, skal $\neg r$ være utsagnet $\neg p \wedge q$?

Det var vel ikke det vi mente, \dots , eller?

Sammensatte utsagn og bruk av parenteser

- Vi vil bruke parenteser for å markere **rekkevidden** av et konnektiv, det vi si, hva vi mener med p og med q når vi skriver $\neg p$, $p \wedge q$ eller $p \vee q$.
- Vi skal gi en mer formell beskrivelse av hvordan vi skal bruke parenteser senere, men praksis fra skolealgebraen er retningsgivende.
- For eksempel skriver vi

$$\neg(x = 0 \wedge y > 0)$$

hvis vi mener å **negere** hele konjunksjonen, mens vi skriver

$$\neg(x = 0) \wedge y > 0$$

hvis det bare er $x = 0$ som skal negeres.

Sammensatte utsagn og bruk av parenteser

- For tydligere å se forskjellen, kan vi regne ut sannhetsverditabellen til de to sammensatte uttrykkene $\neg p \wedge q$ og $\neg(p \wedge q)$.
- En sannhetsverditabell for et sammensatt uttrykk vil være en tabell hvor vi har følgende:
 - En kolonne for hver utsagnsvariabel.
 - En kolonne for hver del av det gitte utsagnet.
 - En rad for hver mulig fordeling av sannhetsverdier på utsagnsvariablene.
 - For hvert delutsagn skriver vi den sannhetsverdien delutsagnet vil ha i hver rad ut fra hvilke sannhetsverdier utsagnsvariablene har.

Sammensatte utsagn og bruk av parenteser

Eksempel ($\neg(p \wedge q)$)

| p | q | $p \wedge q$ | $\neg(p \wedge q)$ |
|----------|----------|--------------|--------------------|
| T | T | T | F |
| T | F | F | T |
| F | T | F | T |
| F | F | F | T |

Sammensatte utsagn og bruk av parenteser

Eksempel ($\neg p \wedge q$)

| p | q | $\neg p$ | $\neg p \wedge q$ |
|----------|----------|----------|-------------------|
| T | T | F | F |
| T | F | F | F |
| F | T | T | T |
| F | F | T | F |

Sammensatte utsagn og bruk av parenteser

Sammenlikner vi høyresidene i de to eksemplene, ser vi forskjellen:

| p | q | $\neg(p \wedge q)$ | $\neg p \wedge q$ |
|----------|----------|--------------------|-------------------|
| T | T | F | F |
| T | F | T | F |
| F | T | T | T |
| F | F | T | F |

Sammensatte utsagn og bruk av parenteser

- Rekkevidden til tegnet \neg er det minste korrekte utsagnet som står bak tegnet.
- Skal vi negere et sammensatt utsagn, må vi normalt sette parenteser rundt det sammensatte utsagnet.
- Hvis et utsagn med både \wedge og \vee kan forstås på flere måter, må vi bruke parenteser for å presisere rekkeviddene til de to bindeordene.

Sammensatte utsagn og bruk av parenteser

- Det er ikke noe i veien for å lage sannhetsverditabeller for sammensatte utsagn med tre eller flere utsagnsvariable.
- I det neste eksemplet skal vi se på et sammensatt utsagn $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$.
- Det finnes 8 forskjellige måter å fordele sannhetsverdiene til tre variable på.
- Det betyr at tabellen vår må ha 8 linjer under streken.
- Med fire variable får vi 16 linjer.
- Det vil ikke få plass på skjermen, så da må vi utvikle andre metoder.

Sammensatte utsagn og sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

| p | q | r | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $\neg p \wedge r$ | $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ |
|----------|----------|----------|----------|--------------|-------------------|---------------------------------------|
| T | T | T | F | T | F | T |
| T | T | F | F | T | F | T |
| T | F | T | F | F | F | F |
| T | F | F | F | F | F | F |
| F | T | T | T | F | T | T |
| F | T | F | T | F | F | F |
| F | F | T | T | F | T | T |
| F | F | F | T | F | F | F |

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

- Hvis $x < 3$, så er $x < 5$.
 - Man skal ikke kunne mye matematikk for å mene at dette må være riktig.
- Utsagnene $x < 3$ og $x < 5$ vil anta forskjellige sannhetsverdier avhengig av hva x er.
- Det vil også det sammensatte utsagnet

$$x < 3 \vee \neg(x < 5).$$

- Er det mulig å definere et utsagnslogisk bindeord \rightarrow slik at:
 - Hvis p og q er utsagn, så vil $p \rightarrow q$ være et utsagn slik at sannhetsverdien til $p \rightarrow q$ avhenger av sannhetsverdiene til p og til q ?
 - Når x varierer, skal alltid $x < 3 \rightarrow x < 5$ være sant?

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se nærmere på $x < 3 \rightarrow x < 5$.
- La $p(x)$ stå for $x < 3$ og la $q(x)$ stå for $x < 5$.
- Hvis $x = 2$ vil både $p(x)$ og $q(x)$ få verdien **T**.
 - $p \rightarrow q$ bør bli sann når både p og q er sanne.
- Hvis $x = 4$ vil $p(x)$ få verdien **F**, mens $q(x)$ får verdien **T**.
 - $p \rightarrow q$ bør bli sann hvis p er usann mens q er sann.
- Hvis $x = 6$ blir både $p(x)$ og $q(x)$ usanne.
 - $p \rightarrow q$ bør også bli sann også når både p og q er usanne.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

- Hvis $x^2 > 0$, så er $x > 0$.
- Mange vil protestere på dette!
- Hvorfor?
- Fordi det finnes moteksempler, eksempelvis $x = -1$.
- Et moteksempel er et eksempel på at en ytring ikke alltid er riktig.
- Et moteksempel til et utsagn “Hvis p , så q ” vil alltid være et tilfelle hvor p er sann, mens q er usann.
- Det vil derfor være naturlig å la $p \rightarrow q$ være usann når p er sann og q er usann.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Definisjon

- Hvis p og q er to utsagn, så er $p \rightarrow q$ også et utsagn.
- $p \rightarrow q$ blir sann hvis q er sann eller hvis p er usann.
- Hvis p er sann og q er usann, lar vi $p \rightarrow q$ bli usann.
- Vi vil lese “hvis p , så q ”.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Vi kan definere \rightarrow ved hjelp av følgende sannhetsverditabell.

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|----------|----------|-------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

De som har problemer med at vi her sier at det er sant at noe usant medfører noe sant (eller noe usant) får hente støtte i det kjente sitatet fra Ibsen

hvor Udgangspunktet er galest, blir tidt Resultatet orginalest.

Ibsen fanger her inn essensen av vår definisjon av hvordan sannhetsverdien til

Udgangspunkt \rightarrow Resultat

bestemmes av sannhetsverdien til utgangspunktet og til resultatet, og når utgangspunktet er noe som ikke er sant, kan resultatet bli hva som helst.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

- Det er ikke så naturlig å bruke \rightarrow i programmeringssammenheng. Derfor gir vi ingen eksempler hvor \rightarrow brukes i kontrollstrukturer.
- Læreboka bruker ordet *implies* i forbindelse med \rightarrow .
- Dette er litt uheldig, fordi det lett fører til en sammenblanding av symbolene \rightarrow og \Rightarrow .
- $x < 5 \Rightarrow x < 3$ er regelrett feil, mens $x < 5 \rightarrow x < 3$ er sant for noen verdier av x og usant for andre.
- Dette utdypes mer under forelesningen.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Oppgave

- (a) Finn sannhetsverditabellen til

$$(p \rightarrow q) \rightarrow p$$

- (b) Finn sannhetsverditabellen til

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$$

- (c) Hva ser du i kolonnen lengst til høyre?

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

- Når vi bruker “hvis-så” i dagligtale, kan vi få noe meningsløst ut av det.
- I de eksemplene som følger kan vi diskutere om tolkningen som logikken forteller oss er riktig stemmer overens med den tolkningen vi vil legge i ytringen som vanlig kommuniserende mennesker:

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

- Hvis Noah hadde lært dyrene å svømme, så ville jorda vært overbefolket av løver.
- Hvis ulven spiser Rødhette, vil det bli en Grimm historie.
- Du får gå på kino hvis du vasker opp etter maten.
- Hvis dere avholder reelle demokratiske valg, vil vi gi støtte til oppbyggingen av infrastrukturen.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

- I det nest siste eksemplet gis det ikke rom for å få gå på kino hvis oppvasken ikke tas, og i det siste eksemplet er tilbudet om økonomisk støtte helt klart knyttet til kravet om demokrati.
- Oppvask vil være både en **nødvendig** og en **tilstrekkelig** betingelse for kinobesøk.
- Vi innfører et siste konnektiv, \leftrightarrow som skal fange opp **hvis og bare hvis** i samme forstand som \rightarrow fanger opp **hvis-så**.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Definisjon

- Hvis p og q er utsagn, er $p \leftrightarrow q$ et utsagn.
- $p \leftrightarrow q$ er sant når både p og q er sanne, og når både p og q er usanne.
- $p \leftrightarrow q$ er sant når p og q har den samme sannhetsverdien.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Vi kan selvfølgelig også definere \leftrightarrow ved en sannhetsverditabell:

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|----------|----------|-----------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Legg merke til at om vi skriver ut sannhetsverditabellene for

- $p \leftrightarrow q$
- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

får vi den samme kolonnen lengst til høyre.

Det er en passende treningsoppgave å skrive ut de to siste tabellene.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel ($p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$)

| p | q | $\neg p$ | $\neg p \rightarrow q$ | $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ |
|----------|----------|----------|------------------------|--|
| T | T | F | T | T |
| T | F | F | T | T |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | F | T |

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

De to neste eksemplene blir bare gjennomgått på tavla:

- $p \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow p)$
- $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$