

MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 21: Mer kombinatorikk

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

13. april 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-13 14:13)



Kapittel 9: Mer kombinatorikk

Oppsummering

- Forrige uke startet vi på kapitlet om **kombinatorikk**.
- Vi så på hvordan vi kan finne antall måter å fordele n like objekter på k ulike beholdere på.
- Dette skal vi komme tilbake til.
- Vi så på **inklusions- og eksklusjonsprinsippet**:

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$

- Videre så vi på **multiplikasjonsprinsippet**.
- Det skal vi fortsette med i dag.

Multiplikasjonsprinsippet

Etter dagens forelesning skal følgende oppgave være lett:

Oppgave

- a) Vi skal fordele syv like hvite kuler og seks like røde kuler på fire forskjellige bokser.
Hvor mange måter kan dette gjøres på?
- b) Hvis vi krever at de hvite kulene skal ligge i de tre første boksene og de røde i de tre siste, hvor mange mulige fordelinger har vi da?
- c) Løs a) hvis vi i utgangspunktet bare hadde tre bokser, og sammenlikn svaret med svaret fra b).
Forklar det du observerer.

Multiplikasjonsprinsippet

- Multiplikasjonsprinsippet:
Hvis vi skal treffe en serie uavhengige valg, vil det totale antall muligheter være produktet av antall muligheter ved hvert valg.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Antall elementer i det kartesiske produktet $A \times B$ er antall elementer i A multiplisert med antall elementer i B .

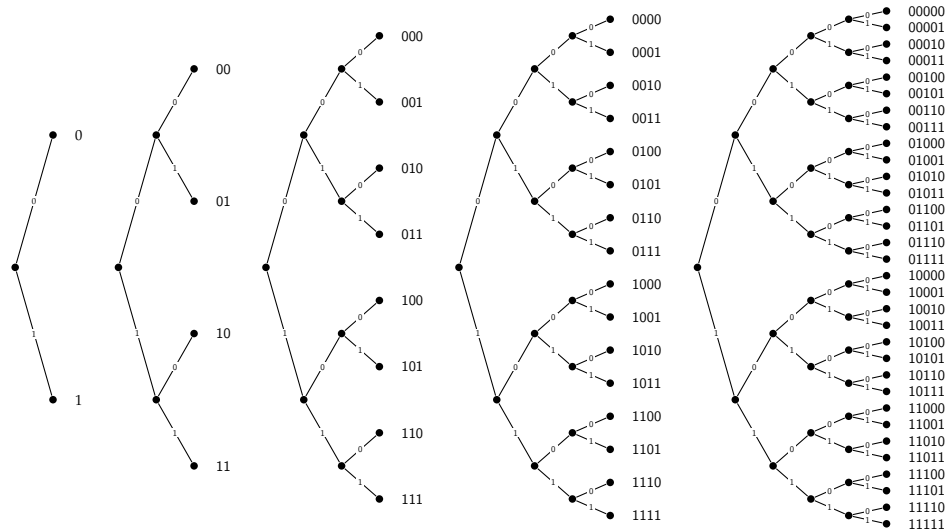
Multiplikasjonsprinsippet

- Både inklusjons- og eksklusjonsprinsippet og multiplikasjonsprinsippet kan generaliseres til flere enn to mengder.
 - Generaliseringen av inklusjons- og eksklusjonsprinsippet til tre mengder ses ved hjelp av Venn-diagrammer. Det vil vi ikke få bruk for.
 - Generaliseringen av multiplikasjonsprinsippet blir

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Det vil vi få bruk for.

Eksempel - det er 2^n binære tall av lengde n

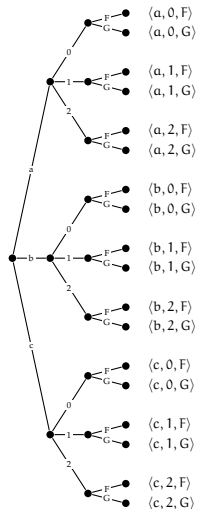


Eksempel - $\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\} \times \{F, G\}$

Multiplikasjonsprinsippet gir oss følgende:

$$\begin{aligned} & |\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\} \times \{F, G\}| \\ &= |\{a, b, c\}| \cdot |\{0, 1, 2\}| \cdot |\{F, G\}| \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Vi kan illustrere det slik:



Permutasjoner

- Det neste vi skal se på er hva vi mener med en **permutasjon** og på hvordan vi kan telle opp antall permutasjoner av en ordnet mengde.
- En **permutasjon** er en endring av en rekkefølge, eller en omstokking.
- Når vi stokker en kortstokk er poenget at kortene skal ligge i en annen rekkefølge, og med et fremmedord kan vi si at vi permuterer kortene.
- Vi skal se på noen eksempler.

Eksempel

- På hvor mange forskjellige måter kan vi skrive tallene 1, 2 og 3 i rekkefølge?
- Vi har tre valg for hvilket tall vi vil skrive først: 1, 2 eller 3.
- For hvert av disse valgene har vi to valg for hvilket som blir det neste tallet:

Starter vi med 1 må det neste tallet være 2 eller 3, starter vi med 2 må det neste tallet være 1 eller 3 og starter vi med 3 må det neste tallet være 1 eller 2.

- Har vi bestemt hvilke to tall vi skriver først, gir det siste tallet seg av seg selv.
- Det fins altså $3 \cdot 2 = 6$ måter å skrive disse tre tallene i rekkefølge på.

Eksempel

- Hvis vi utvider eksemplet vårt fra forrige side til å omfatte tallene 1, 2, 3 og 4 vil antall permutasjoner vokse til $4! = 24$ og tar vi med 5 i tillegg er antallet $5! = 120$.
- I det siste tilfellet har vi først fem valg for hvilket tall som skal skrives først, deretter fire valg for tall nr. 2, tre valg for tall nr. 3 og to valg for tall nr. 4. Det siste tallet gir seg selv.
- Generelt fins det $n!$ permutasjoner av tallene $1, \dots, n$.
- Dette svarer også til hvor mange rekkefølger vi kan sette n elementer i. Eksempelvis kan syv studenter ordnes på $7! = 6720$ måter.

Definisjon (Permutasjon)

En *permutasjon* er en endring av rekkefølgen av elementene i en ordnet mengde. Vi sier også at en *permutasjon* av en mengde er en ordning av elementene i mengden.

Her bruker vi ordet *permutasjon* slik boka tillater det, men det vanlige er å oppfatte en permutasjon som en omstokking, elementene bytter plass med hverandre.

Eksempel

Permutasjonene av $\{A, B, C\}$ er ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- Det er $n!$ permutasjoner av en mengde med n elementer.
- Og vi vet (selvfølgelig) at $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 1$
- I eksempelet har vi 3 elementer og $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutasjoner.

Eksempel

- Et kjent problem i litteraturen er [Den handelsreisendes problem](#) ([The traveling salesman](#)).
- Hvis vi har gitt n byer som skal besøkes, og vi kjenner avstanden mellom to og to av byene, hva er da den korteste veien gjennom alle byene?
- Det er ennå ingen som har kommet opp med et program som løser dette problemet når antall byer er stort, som for eksempel alle tettsteder i Norge med mer enn 300 innbyggere.
- Vi skal se på hva dette problemet kan ha med antall permutasjoner å gjøre.

Eksempel (Fortsatt)

Hvis antall byer som skal besøkes er mindre, blir selvfølgelig oppgaven gjennomførbar.

Anta at vi har fått i oppdrag å skrive et program som finner den korteste reiseruten fra by A til by B, og som går gjennom ti andre byer C_1, \dots, C_{10} i en eller annen rekkefølge.

Igjen kan vi anta at alle avstander er kjent.

En måte å gjøre dette på er å liste opp alle mulige rekkefølger vi kan besøke byene C_1, \dots, C_{10} i, regne ut alle reiselengdene og så velge ut den korteste.

Problemet er at det fins $10! = 3.628.800$ forskjellige rekkefølger vi kan velge mellom.

Eksempel (Fortsatt)

- Det betyr altså at det fins over tre og en halv million måter å reise fra Oslo til Kirkenes på, når reisen skal gå via
 - Kristiansand
 - Stavanger
 - Bergen
 - Molde
 - Kristiansund
 - Trondheim
 - Bodø
 - Narvik
 - Tromsø
 - Alta

Eksempel (Fortsatt)

Øker vi antall byer som skal besøkes til 12, hvis vi for eksempel vil besøke Haugesund og Levanger i tillegg, vil vi være i nærheten av 400.000.000 enkeltruter, og da begynner de raske maskinene å slite.

Det vil gå flere generasjoner maskiner mellom hver gang vi kan øke antall byer med 1 hvis vi bruker denne naive måten.

Eksempel (Fortsatt)

- Det man i praksis gjør er å akseptere at det er dumt å bruke år på å finne ut av om man kan spare noen få kilometers reise, og utvikler raske algoritmer som gir effektive reiseruter, uten å garantere at den finner den mest effektive.
- Det fins elektroniske reiseplanleggere som må forene hensynet til kort regnetid og et godt resultat.
- Tilsvarende **optimeringsproblemer** finner man for effektiv utnyttelse av lagerplass, effektiv organisering av produksjonsleddene i en bedrift og liknende.

Eksempel

- Dette eksemplet er stjålet fra en tidligere lærebok i diskret matematikk, den gang det het MA 108.
- Hvor mange ord kan vi skrive ved hjelp av bokstavene i
MISSISSIPPI?
- Det er 11 bokstaver, og har vi en blytype for hver bokstav, kan vi sette disse i $11!$ forskjellige rekkefølger.
- Det gir oss 39 916 800 forskjellige rekkefølger.

Eksempel (Fortsatt)

- Rekkefølgen vi setter de to P'ene i, betyr imidlertid ikke noe for resultatet. Det alene halverer antall ord vi kan skrive.
- Det er fire I'er og fire S'er. Den innbyrdes rekkefølgen blant I'ene og blant S'ene betyr heller ikke noe for hvordan det ferdige ordet ser ut.
- Det er $4! = 24$ måter å trykke de fire S'ene og $4! = 24$ måter å trykke de fire I'ene på.
- Det betyr at antall forskjellige ord vi kan skrive er

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650.$$

Oppgave

Hvor mange forskjellige ord kan vi skrive ved å stokke om på bokstavene i ordet

PUSLESPILL

Regn ut svaret fullstendig.

Ordnet utvalg

Vi skal nå se på det som kalles **ordnet utvalg** fra en mengde.

Eksempel

Oppgave:

I et barneskirenn er det med 20 barn.

Det er lov til å opplyse om hvem som tok de tre første plassene, mens resten ikke skal rangeres.

Hvor mange forskjellige resultatlistene kan man få?

Eksempel (Fortsatt)

Løsning:

Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andre plasser og til sist 18 mulige tredje plasser.

Det fins altså $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ forskjellige resultatlistor.

- Legg merke til at

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1}{17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1} = \frac{20!}{(20 - 3)!}$$

- Vi skal nå definere dette mer generelt og bruke notasjonen ${}^{20}P_3$ for dette tallet.

Definisjon

- La r og n være naturlige tall slik at $r \leq n$.
- Med ${}^n P_r$ mener vi $\frac{n!}{(n-r)!}$

Merk

- ${}^n P_r$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke r elementer i rekkefølge ut fra en mengde med n elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

$${}^n P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

- Det er som forventet, siden det er $n!$ permutasjoner av en mengde med n elementer i.

Eksempel


- En idrettsleder har syv løpere i stallen sin, og skal velge ut fire av dem til å delta i en stafett.
- I et stafettag spiller rekkefølgen stor rolle, især om idrettsgrenen er langrenn og det er to etapper i klassisk og to i fristil.
- Da er det ${}^7P_4 = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ forskjellige laguttak.

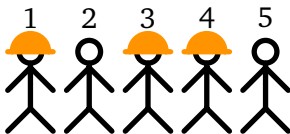
Kombinasjoner

$$\binom{n}{k}$$

angir hvor mange delmengder med k elementer det finnes av en mengde med n elementer

- Vi har tidligere vist dette ved induksjon.
- Det er også mulig å vise dette rent kombinatorisk, som vi skal gjøre snart.
- Slike tall kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Her vil hver kombinasjon av hatter, f.eks. $\{1, 3, 4\}$, bli talt $3! = 6$ ganger, som 134, 143, 314, 341, 413, og 431.
- Hvis vi skal ta høyde for dette, så må vi dele på 6.
- Antall måter å fordele hattene er derfor $60/6 = 10$, som er $\binom{5}{3}$.

Teorem

- La A være en mengde med n elementer, og la $0 \leq k \leq n$.
- Da finnes det

$$\binom{n}{k}$$

forskjellige delmengder B av A .

Bevis (Nytt, og fritt for induksjon)

- Antall måter å velge k elementer i rekkefølge fra A på er

$${}^n P_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- For hver delmengde B med k elementer, så fins det $k!$ forskjellige ordnede utvalg fra A som gir oss B .
- Da må antall mengder B med k elementer være

$$\frac{{}^n P_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Kombinasjoner

- Legg merke til at

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Hvorfor det?
- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.
- For hver slik mengde, så har vi også en mengde med 2 elementer.
 - Vi kan f.eks. lage en funksjon som til enhver delmengde av størrelse 18 gir en delmengde av størrelse 2.
 - Denne funksjonen vil være både surjektiv og injektiv.
- Derfor har vi at $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$.
- Antall delmengder av størrelse k må være lik antall delmengder av størrelse $n - k$.
- Det er like mange måter å velge n elementer på som det er å måter å *velge bort* n elementer på.



Binomialkoeffisientene

- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.
- Følgende (rekursive) sammenheng var utgangspunktet for et tidligere induksjonsbevis:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

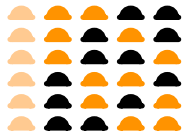
- Hvorfor er det slik? La oss se på et eksempel.

Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.



- Hvis den første hatten er svart, så må *tre* av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{3} = 4$ måter å gjøre dette på.



Binomialkoeffisientene

- Dette forteller oss at det er to ekvivalente måter å definere binomialkoeffisientene på:
 - Ved hjelp av fakultetsfunksjonen og brøk:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

- Ved rekursjon:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascals trekant

- Pascals trekant er en måte å skrive opp alle binomialkoeffisientene på ved hjelp av formelen

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Husk at

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- Vi får følgende bilde.

					$\binom{0}{0}$							
					$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$					
				$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$					
			$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$					
		$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$					
	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$		$\binom{5}{5}$					
$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$						

- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant
 - De naturlige tallene: 1,2,3,4,5,6,...
 - De såkalte triangulære tallene: 1,3,6,10,15,21,...
 - Toerpotensene: 1,2,4,8,16,32,...
 - Kvadrattallene: 1,4,9,16,25,...
 - Fibonacci-tallene (selv om de er godt gjemt): 1,1,2,3,5,8,13,21,...
 - Og mange flere...

Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a + b)^0 = 1$.
- Alle vet at $(a + b)^1 = a + b$.
- Mange vet at $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- De fleste kan regne ut at $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Noen greier til og med å regne ut at $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- Noen bør begynne å ane at det er en sammenheng med Pascals trekant.
- Siden $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ blir den anelsen bekreftet.

Tilbake til binomialkoeffisientene

Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall a og b og alle hele tall $n \geq 0$ har vi

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Tilbake til binomialkoeffisientene

Bevis

- $(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \cdot (a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi 2^n ledd.
- Hvert ledd består av n faktorer, hvor hver faktor er enten a eller b , f.eks. $abaa \cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1, \dots, n\}$, så lar vi B svare til leddet hvor faktor nummer i er b hvis $i \in B$ og a ellers.
- F.eks. vil $\{1, 4, 5\}$ svare til leddet $\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{b}\underset{5}{b}\underset{6}{a} \cdots \underset{n}{a}$
- Hvert ledd kommer fra en og bare en mengde B ; det vi har beskrevet er en surjektiv og injektiv funksjon fra potensmengden av A til leddene vi får når vi regner ut $(a + b)^n$.

Tilbake til binomialkoeffisientene

Bevis (Fortsatt)

- Det fins $\binom{n}{k}$ delmengder av A med k elementer.
- Da fins det $\binom{n}{k}$ ledd med k b 'er og $n - k$ a 'er.
- Disse leddene ordnes til

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- Dette er nøyaktig leddet med indeks k i teoremet.
- Siden k er vilkårlig må formelen i teoremet gi oss verdien på $(a + b)^n$.
- Dette avslutter beviset.

Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: n^r
 - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
 - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^n P_r$
 - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
 - Det er ${}^{52} P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
 - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
 - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$
 - Hvor mange delmengder av $\{a, b, c, d, e\}$ har to elementer?
 - Det er $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$
- Vi skal se på noen flere eksempler.

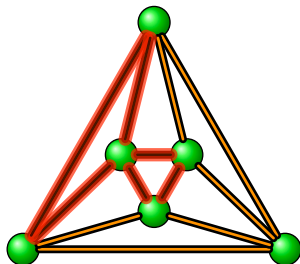
Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: 10^6 atomer.
- Atomer i en vandrdåpe: 10^{21} atomer.
- Atomer i universet: 10^{80} atomer.
- Antall forfedre 265 generasjoner tilbake = antall atomer i universet.
- Og disse tallene er ganske små...
- Allikevel kan vi representere dem og regne på dem uten store problemer.

Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



- Oppgave: klarer dere å tegne denne på et ark uten å løfte blyanten og uten å gå over en kant to ganger?