MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 22: Grafteori

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

14. april 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-14 12:42)

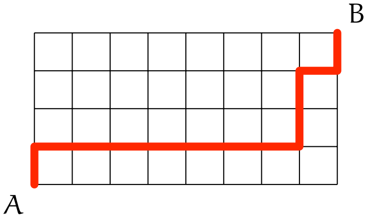
Kombinatorikk

Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: n^r
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
- Permutasjoner: $n!$
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$
- Vi skal se på noen flere eksempler.

Eksempel

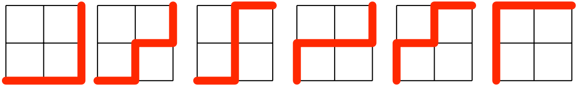
På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra A til B i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.
- Dette er et ord på 12 tegn over alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow\}$ hvor fire av tegnene er $\uparrow$ og åtte av tegnene er $\rightarrow$.
- Hvor mange slike ord er det? Det er $\binom{12}{4} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$

Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



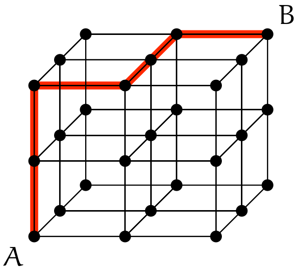
- Antall ord blir i dette tilfellet:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

som stemmer...

Oppgave

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra A til B i denne $2 \times 2 \times 2$-kuben? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover, til høyre eller innover?

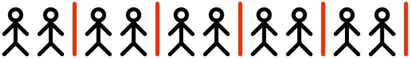


Eksempel

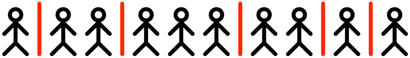
- (Dette ble også nevnt på forrige forelesning i et introduksjonseksempel om kuler og bokser.)
- På hvor mange ulike måter kan de 6 karakterene A til F gis til 10 studenter?
- Vi ikke er interessert i hvilken karakter en bestemt student får, men kun antallet av hver karakter i fordelingen.
- Det er 6 muligheter for hver av de 10 studentene.
- Kan vi bruke multiplikasjonsprinsippet og si at svaret er 6^{10}? Nei
- La oss lage 6 båser og putte studentene i hver sin bås avhengig av hvilken karakter de får.

Eksempel

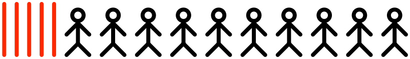
- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



- Fordelingen 123211 kan representeres slik:



- At alle stryker kan representeres slik:



- Hvor mange slike kombinasjoner fins det?
- Av 15 tegn må 5 være røde streker.
- Antall muligheter må være

$$\binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3003$$

Eksempel

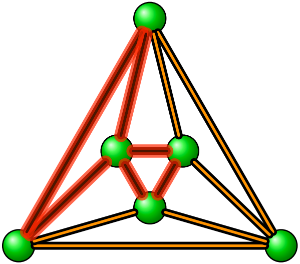
Eksempel

- Mer generelt har vi
$$\binom{n+k-1}{k-1}$$
som gir hvor mange forskjellige måter vi kan fordele n identiske elementer i k forskjellige beholdere på.
- Dette kalles også for uordnet utvalg *med repetisjon*.

Grafteori

Grafteori

- I går ga vi en smaksprøve på *grafteori*.
- Vi sa at en *graf* består av *noder* og *kanter*:



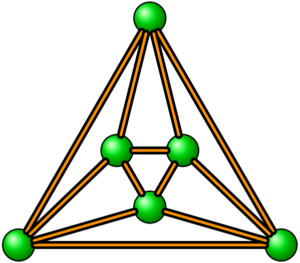
- Vi ga følgende oppgave: Klarer dere å tegne denne på et ark uten å løfte blyanten og uten å gå over en kant to ganger?

Grafteori

- Grafer fins overalt rundt oss!
- Grafteori er en viktig del av både *anvendt* og *teoretisk* matematikk.
- Grafteori brukes til å modellere problemer innenfor mange områder: informatikk, biologi, samfunnsvitenskap, lingvistikk, fysikk ...
- Mange problemer kan *representeres* ved å bruke grafer.
- Vi har møtt idéen om *representasjon* flere ganger allerede.
- Vi representerer f.eks. reelle tall ved hjelp av binære tall.
- Vi kan representere et matematisk problem som et annet som er enklere å løse.
- En representasjon gjør at vi kan se bort fra det som er irrelevant. Vi fanger inn *essensen*.
- Det er akkurat det som skjer i grafteori.

En graf

- En *graf* består av *noder* () og *kanter* ().
- Vi har til nå sett et eksempel på en graf:



- Klarte dere å tegne denne på et ark uten å løfte blyanten og uten å gå over en kant to ganger?
- Etter disse forelesningene i grafteori skal alle klare å besvare dette spørsmålet umiddelbart.
- Vi skal se at oppgaven er ekvivalent med å finne en såkalt *Eulersti*.

Søkealgoritmer for grafer

- Søkealgoritmer for grafer er et viktig tema.
- Kjente søkealgoritmer for grafer er f.eks.:
  - *Prims algoritme* for å finne et *minimalt spenntre* i en vektet graf. (Kruskals algoritme for samme problem.)
  - *Dijkstras algoritme* for å finne *minste avstand*, eller *korteste sti*, i en vektet graf.
- Vi kan søke bredde først eller dybde først
- For veldig mange grafproblemer har man ikke funnet *effektive* algoritmer.

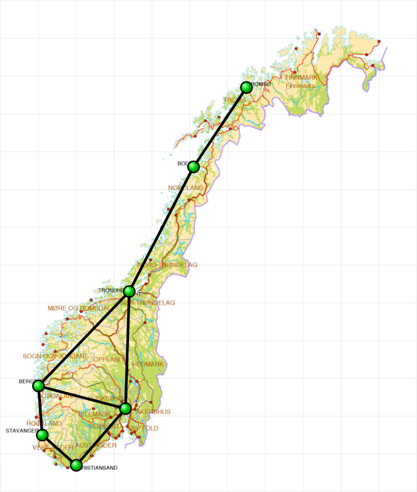
Grafteori - noen eksempler

Eksempler på grafer

Grafer kan representere mange forskjellige ting.

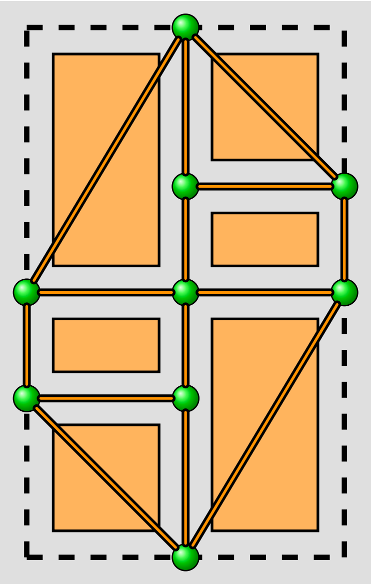
- Nodene kan være studentene på Blindern, og kantene kan representere at to kjenner hverandre.
- Nodene kan være tilstandene som et dataprogram er i, og kantene kan representere overganger mellom tilstandene.
- En graf kan representere lenkestrukturen på et nettsted, hvor nodene er nettsider og kantene er lenker.
- Listen fortsetter: elektroniske kretser, molekyler i kjemi, datanettverk, analyse av nettverkstrafikk. . .
- Et *tre* er en spesiell type graf. Vi kommer til trær i kapittel 11.
- Vi skal se på flere eksempler på grafer før vi begynner med teorien.

- Et kart kan gi utgangspunkt for flere forskjellige grafer.
- En mulighet er at
    - nodene representerer *byer*
    - kantene representerer *veier*
- En annen mulighet er at
    - nodene representerer *områder*, f.eks. fylker
    - kantene representerer *grenser*
- Når vi har representasjonen, så kan vi egentlig glemme det opprinnelige kartet.



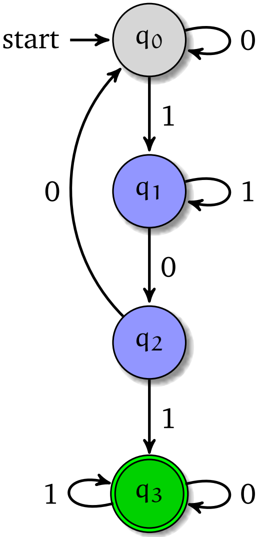
Veinett som grafer

- Et veinett kan representeres som en graf.
- Vi kan la hvert *kryss* svare til en node.
- Vi kan la *veiene* som forbinder kryssene svare til kantene.
- Når vi har tegnet opp grafen, så kan vi resonnere om den i stedet for om selve veinettet.



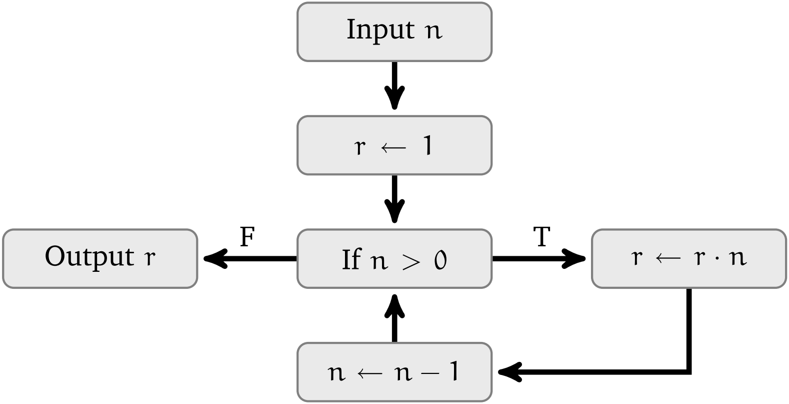
Endelige tilstandsmaskiner som grafer

- Vi kan tenke på *endelige tilstandsmaskiner* som grafer.
- Her kalles q_0, q_1, q_2 og q_3 *tilstander* og overgangene kalles *transisjoner*.
- Vi har en starttilstand, q_0 og en såkalt *aksepterende* tilstand, q_3.
- Hvis vi begynner med tallet 1101 og følger kantene etter hvert som vi leser siffer, så ender vi opp i q_3. Siden det er en aksepterende tilstand, er 1101 *akseptert*.
- Tallet 100 aksepteres ikke, siden vi ender opp i tilstand q_0, som ikke er aksepterende.
- Ser du hvilke tall som aksepteres?



Flytdiagrammer som grafer

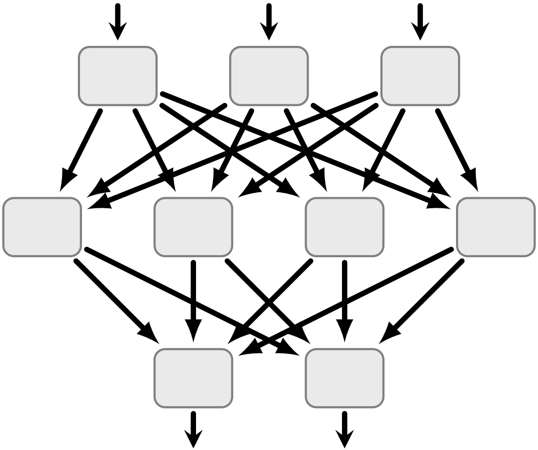
- Vi kan tenke på *flytdiagrammer* som grafer.
- I følgende eksempel representerer nodene programinstruksjoner.



- Hvilket program er dette?

Flytdiagrammer og multiplikasjonsprinsippet

- Multiplikasjonsprinsippet igjen.



Grafteori - definisjoner og begreper

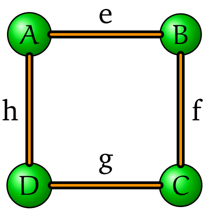
Grafteori - definisjoner og begreper

Definisjon (Graf)

En *graf* G består av en ikke-tom mengde *noder* V og en mengde *kanter* E, slik at enhver kant forbinder nøyaktig to noder med hverandre eller en node med seg selv.

- Dette er med vilje litt upresist.
- Vi presiser heller etter hvert når vi trenger det.
- På engelsk brukes begrepene
  - *vertex/vertices* om noder, og
  - *edges* om kanter.
- Vi tegner noder slik: 
- og kanter slik: 
- Det er ikke viktig akkurat *hvordan* vi tegner grafer; det er *strukturen* i graf som er viktig, hvilke noder som er forbundet med hvilke via en kant.

Grafteori - definisjoner og begreper



Her er A, B, C og D noder, mens e, f, g og h er kanter.

Definisjon (Inntil/naboer)

En kant ligger *inntil* (engelsk: *incident*) nodene som forbindes av den. To noder er *naboer* (engelsk: *adjacent*) hvis de forbindes av en kant.

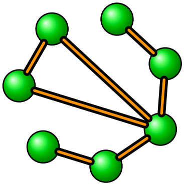
- Kanten e ligger inntil nodene A og B.
- Nodene B og C er naboer, siden de forbindes av kanten f.

Sammenhengende grafer

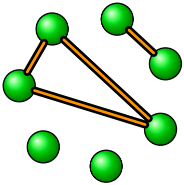
En graf trenger ikke å være *sammenhengende*.

Definisjon (Sammenhengende)

En graf er *sammenhengende* (engelsk: *connected*) hvis det er mulig å komme fra enhver node til enhver annen node ved å følge kantene.



En *sammenhengende* graf.



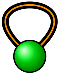
En *usammenhengende* graf.

Tomme grafer og løkker

En graf trenger ikke å ha noen kanter, men den må ha minst én node. Grafer uten kanter kalles *nullgrafer* eller *tomme grafer* (engelsk: *null graph*).

En tom graf.

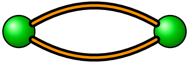
En graf kan ha *løkker* (engelsk: *loop*), en kant som går fra en node til den samme noden.



En graf med en løkke.

Parallelle kanter og enkle grafer

En graf kan ha *parallelle* kanter, to eller flere kanter som forbinder de samme to nodene.



En graf med parallelle kanter.

Definisjon (Enkel)

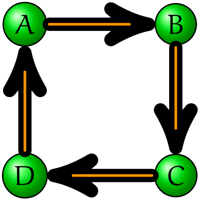
En graf er *enkel* (engelsk: *simple*) hvis den ikke har løkker eller parallelle kanter.

- Det er ganske vanlig å definere grafer slik at løkker og parallelle kanter ikke forekommer.

Rettede grafer

Definisjon

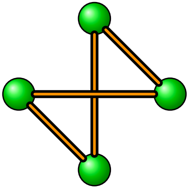
En *rettet graf* (engelsk: *directed*) er en graf hvor hver kant har en retning.



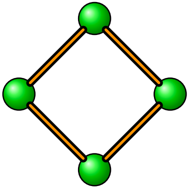
- En *relasjon* kan ses på som en rettet graf.
- Denne grafen svarer til relasjonen $\{\langle A, B\rangle, \langle B, C\rangle, \langle C, D\rangle, \langle D, A\rangle\}$.
- Hvis vi har en *symmetrisk* relasjon, riktignok, så kan vi tenke på denne som en vanlig (urettet) graf.
- Foreløpig skal vi ikke snakke om rettede grafer.

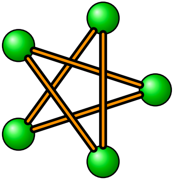
Måter å tegne opp grafer på

- Det fins ikke noen unik måte å tegne opp en graf på.
- Vi bryr oss for eksempel ikke om hvor lange kantene er, om de er bøyd, etc.
- Det eneste som spiller noen rolle er om to noder er forbundet med en kant.
- La oss se på noen eksempler. Følgende par av grafer er identiske, men tegnet opp på forskjellige måter.
- Vi forestiller oss at kantene er elastiske og at vi flytter om på nodene.
- Vi skal etter hvert presisere dette gjennom begrepet *isomorfi*. Følgende par av grafer kalles *isomorfe*.

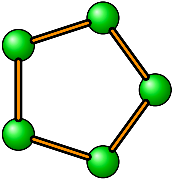


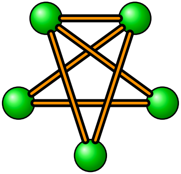
er lik



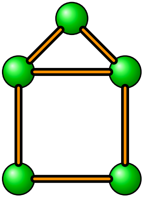


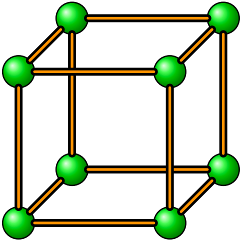
er lik



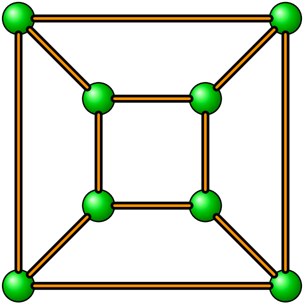


er lik





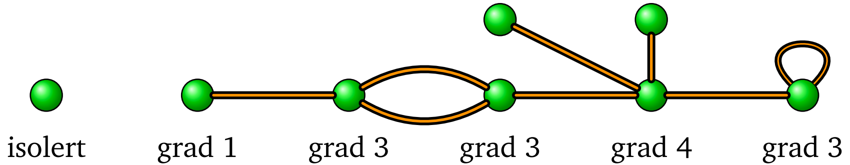
er lik



Graden til noder

Definisjon (Grad)

Graden (engelsk: *degree*) til en node v er antall kanter som ligger inntil v. En løkke teller som to kanter. Med $\mathtt{deg}(v)$ mener vi graden til v. En node med grad 0 kalles *isolert*.



Graden til noder

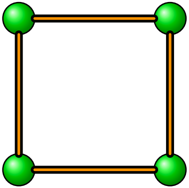
Teorem

Summen av gradene til alle nodene i en graf er lik 2 ganger antallet kanter. Hvis V er mengden av noder og E er mengden av kanter, så har vi

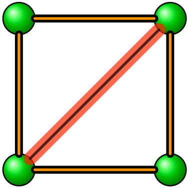
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

- Hver *kant* som legges til i en graf vil øke summen av gradene med to.
- La oss se på et eksempel.

Graden til noder



Antall kanter er 4.
Summen av gradene er 8.



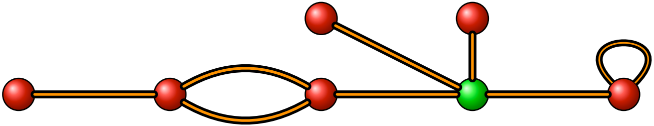
Antall kanter er 5.
Summen av gradene er 10.

Bevis

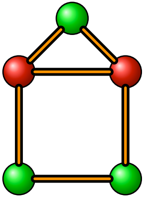
Hvis vil legger sammen gradene til alle nodene, så vil hver kant telle to ganger, siden hver kant ligger inntil to noder.

Lemma (håndhilselemmaet)

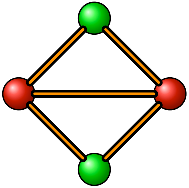
Det er alltid et partall antall noder av odde grad i en graf.



Her er det 6 noder (markert med rødt) med odde grad.



Her er det 2 noder av odde grad.



Her er det 2 noder av odde grad.

Håndhilselemmaet

- Hvis vi forestiller oss mange mennesker samlet i et rom og at man håndhilser på hverandre, så må antallet av de som håndhilser på et odde antall personer være et partall.
- Vi kan representere denne situasjonen ved å representere menneskene som noder. En kant vil da representere at to personer håndhilser på hverandre.
- Det kalles et lemma fordi det ikke er så interessant i seg selv, men er nyttig for å bevise andre lemmaer og teoremer.
- Vi skal nå bevise håndhilselemmaet.

Bevis (håndhilselemmaet)

La G være en graf. Vi deler mengden V av noder inn to: V_o er de som har odde grad (de som var røde) og V_p er de som har lik grad (de som var grønne). Vi har vist et teorem som sier at summene av gradene til *alle* nodene er to ganger antall kanter.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Siden vi har delt opp mengden av noder i to, kan vi skrive dette slik:

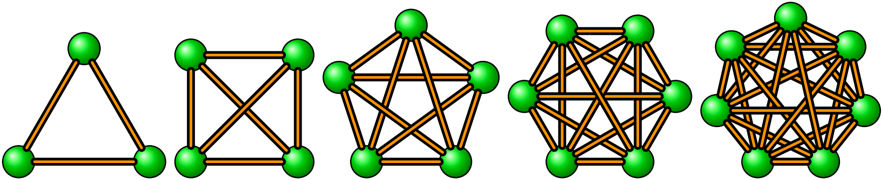
$$\sum_{v \in V_o} \deg(v) + \sum_{v \in V_p} \deg(v) = 2|E|$$

Siden $2|E|$ er et partall og summen av gradene til nodene i V_p er et partall, så må summen av gradene til nodene i V_o også være et partall. Siden hver node i V_o har odde grad, så må det være et partall antall av dem.

Komplette grafer

Definisjon (Komplett graf)

En enkel graf er *komplett* hvis hver node er nabo med enhver annen node.



Komplette grafer (K_3, K_4, K_5, K_6, K_7).

- Hvor mange kanter er det i en komplett graf?
- K_3 har 3 kanter. K_4 har 6 kanter. K_5 har 10 kanter. K_6 har 15 kanter. K_7 har 21 kanter. Er det noen som ser et mønster?

Komplette grafer

Teorem

Det er $\binom{n}{2}$ kanter i en komplett graf med n noder.

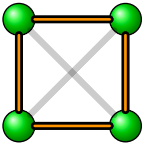
- Det er fordi vi har en kant for hver mengde av noder med kardinalitet 2.
- K_n representerer kampoppsettet i en enkel serie som omfatter n lag.
- For det vanlige oppsettet med hjemme- og bortekamper vil kampoppsettet representeres av en komplett rettet graf.

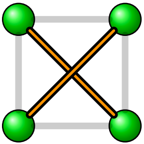
Komplementet til en graf

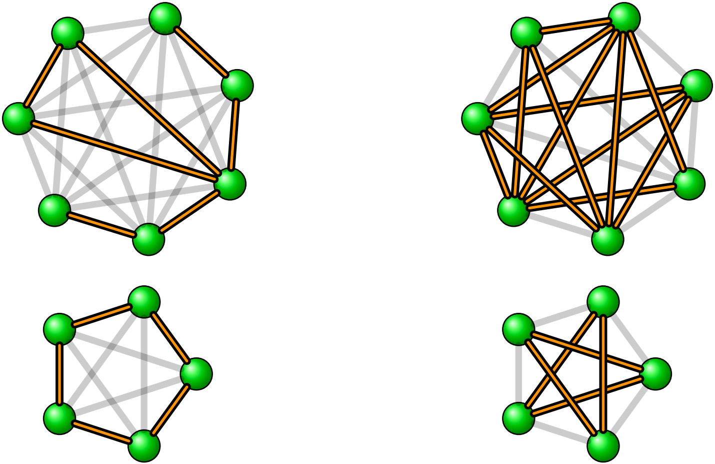
Definisjon (Komplement)

La G være en enkel graf. Da er *komplementet* til G grafen som har de samme nodene som G, men hvor to noder er naboer hvis og bare hvis nodene *ikke* er naboer i G. Vi skriver $\overline{G}$ for komplementet til G.

Vi skal se på noen grafer og deres komplementer.



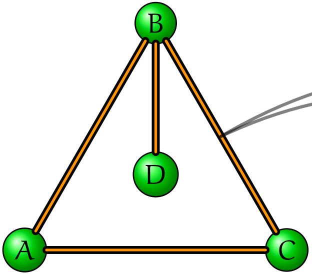




- I det siste tilfellet fikk vi ikke noen *ny* graf når vi tok komplementet.
- Slike grafer kalles *selv-komplementære*.

Matriserepresentasjoner

På samme måte som med relasjoner, så har grafer en matriserepresentasjon. Vi kaller en slik matrise for en *koblingsmatrise* (engelsk: *adjacency matrix*).



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

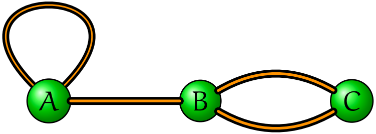
Koblingsmatrisen til grafen.

Matriserepresentasjoner

Definisjon (Koblingsmatrise)

Hvis G er en graf med n noder, $v_1, \ldots, v_n$, så er koblingsmatrisen til G en n-ganger-n-matrise hvor tallet i rad i og kolonne j er antall kanter mellom v_i og v_j.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Koblingsmatrisen til grafen.

Matriserepresentasjoner

- Legg merke til at vi kan speile en matrise om diagonalen.
- Det er fordi vi kun ser på *urettede* grafer.
- Hvis vi ser på rettede grafer, så kan vi ikke speile matrisen om diagonalen.
- Vi kunne også speile om diagonalen for *symmetriske relasjoner*.
- En forskjell mellom symmetriske relasjoner og grafer er at vi tillater *parallelle* kanter i grafene.
- De kan vi ikke fange inn ved hjelp av en relasjon.
- Det fins flere matriser for samme graf, avhengig av rekkefølgen vi gir nodene i.