MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 10: Mengdelære

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

17. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-17 12:40)

Kapittel 5: Mengdelære

Oversikt

- Tirsdag snakket vi først litt om mengder, og om hvordan vi beskriver en mengde.
- Vi har innført de Boolske operasjonene,
  - union $\cup$: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - snitt $\cap$: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - komplement $\overline{A}$: $\overline{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\}$
  - mengdedifferens $A - B$: $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

  samt de faste mengdene $\emptyset$ og $\mathcal{E}$.
- Vi tegnet Venndiagrammet tilhørende de forskjellige Boolske operasjonene, og begynte på et eksempel på litt mer avansert bruk av Venndiagrammer.
- Vi fortsetter med flere eksempler (på tavlen).

Mengdeteoretiske lover

Eksempel

- deMorgans lover
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (som vi så på i går).
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- De distributive lovene
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Eksempel

- $A \cap \overline{(B \cup C)} = (A - B) \cap (A - C)$
- $(\overline{A} - B) \cap C = C - (A \cup B)$

Mengdeteoretiske lover

Oppgave

- Vi bruker bare Venndiagrammer for uttrykk med en, to eller tre mengder.
- Tegn et Venndiagram for tre mengder A, B og C, og sett inn sannhetsverdiene for de tre basisutsagnene $x \in A$, $x \in B$ og $x \in C$ i de forskjellige feltene.
- Undersøk hvor mange deler det er mulig å dele planet inn i ved hjelp av fire sirkler.
- Forklar hvorfor dette viser at Venndiagrammer ikke er hensiktsmessige for Boolske uttrykk med mer enn tre mengder.

Inklusjon

Eksempel

- Det er selvfølgelig slik at alle tall som kan deles på 4 også er partall.

  Vi sier da at mengden av tall delelige med 4 er inneholdt i partallene, eller at den er en delmengde av partallene.
- Mengden av registrerte fødselsnummere er inneholdt i mengden av alle data registrert i skattedirektoratet.
- Mengden av hunder er en delmengde av mengden av dyr.

Inklusjon

Definisjon

Hvis A og B er mengder, sier vi at A er inneholdt i B, eller at A er en delmengde av B, hvis

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

- Vi skriver
$$A \subseteq B$$
for at A er inneholdt i B.

Inklusjon

- Vi vil kunne skrive $A \subseteq B$ selv om $A = B$.
- Noen forfattere bruker $A \subset B$ slik vi bruker $A \subseteq B$ mens andre bruker det i betydningen

$$A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

- I dette siste tilfellet vil vi si at A er ekte inneholdt i B.

Inklusjon

Eksempel

- $\{2, 5, 6\} \subseteq \{1, 2, 5, 6, 7\}$ og inklusjonen er ekte.
- I følge læreboka vil
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{J} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$
Når vi ser på disse mengdene som datatyper, vet vi at vi må bruke forskjellige måter å representere et tall i $\mathbb{J}$ på, avhengig av om vi ser på tallet som et element i $\mathbb{J}$ eller $\mathbb{R}$.

  Denne påstanden er derfor ikke helt uproblematisk, men dog akseptabel for våre formål.
- $\{x : x^2 > 4\} \subseteq \{x : x^2 > 4 \vee x < -1\}$.

Inklusjon

Vi kan bruke Venndiagrammer til å vise at et Boolsk uttrykk alltid definerer en delmengde av mengden definert ved et annet Boolsk uttrykk.

Vi skal se et par eksempler på tavlen.

Eksempel

- $A \cap B \subseteq A \cup B$
- $\overline{A} \cap (B - C) \subseteq B - (A \cap C)$

Disjunkte mengder

Definisjon

To mengder A og B er disjunkte hvis de ikke har noen felles elementer, det vil si, hvis

$$A \cap B = \emptyset.$$

Eksempel

- $\{0, 4, 7, 9\}$ og $\{1, 2, 5, 10\}$ er disjunkte.
- $\{0, 4, 5, 7, 9\}$ og $\{0, 2, 5, 10\}$ er ikke disjunkte.
  Snittet av disse to mengdene er $\{0, 5\} \neq \emptyset$.

Boolsk algebra

- Det er en nær sammenheng mellom Boolsk mengdealgebra og utsagnslogikk.
- Ved å erstatte A med $x \in A$ oppfattet som en utsagnsvariabel, kan vi spisse $\cup$ til $\vee$, $\cap$ til $\wedge$ og erstatte komplement $\overline{A}$ med $\neg(x \in A)$, og vi får en utsagnslogisk formel.
- Det er da naturlig å erstatte $\emptyset$ med **F** og $\mathcal{E}$ med **T**.
- To mengder, definert fra mengdevariable A, B og liknende ved hjelp av union, snitt og komplement vil alltid være like nøyaktig når oversettelsene er logisk ekvivalente.

Boolsk algebra

- Tabell 5.1 på side 80 (79 i Utgave 2) i læreboka lister noen Boolske identiteter.
- De har sine paralleller i tabellen på side 56 (55) over logikkens lover.
- Vi skal ikke drille regning med disse Boolske identitetene.

En digresjon: Russells Paradoks

- Hvis vi hadde kunnet snakke om mengden av alle mengder, hadde vi hatt en grunn mindre til å bringe inn den universelle mengden $\mathcal{E}$.
- Antagelsen om at det fins en mengde som har alle mengder som elementer, leder imidlertid til en motsigelse som kalles Russells Paradoks.
- Vi gir beviset for Russells Paradoks som en oppgave med hint.

En digresjon: Russells Paradoks

Oppgave

- Anta at X er en mengde, og at for alle mengder Y vil $Y \in X$.
- La $Z = \{Y \in X \ : \ Y \notin Y\}$.
- Da er $Z \in X$.
- Vis at hvis $Z \in Z$ så vil $Z \notin Z$.
- Vis at hvis $Z \notin Z$ så vil $Z \in Z$.
- Forklar hvorfor dette viser at mengden X ikke kan finnes.

Digital representasjon av mengder

- I utgangspunktet skal det ikke spille noen rolle i hvilken rekkefølge man skriver opp elementene i en mengde.
- Hvis man imidlertid har behov for å representere visse mengder digitalt, må man velge seg en rekkefølge på elementene i den universelle mengden $\mathcal{E}$.
- Vi skal nå se på en metode for digital representasjon av mengder som virker når $\mathcal{E}$ er endelig.
- Hvis $\mathcal{E}$ er en uendelig mengde, må man enten velge en annen metode eller gi opp.

Digital representasjon av mengder

Definisjon

- Anta at $\mathcal{E}$ har k elementer i rekkefølge

$$\{a_1, \ldots, a_k\}.$$

- La $A \subseteq \mathcal{E}$
- Vi representerer A som informasjon på k bit i rekkefølge, ved at bit nummer i får verdien 1 hvis og bare hvis $a_i \in A$.

Digital representasjon av mengder

- Ved denne måten å representere mengder på blir det svært enkelt å etterlikne de Boolske operasjonene.
- Snitt svarer til punktvis multiplikasjon, union svarer til det å ta maksimumsverdien punktvis og komplement svarer til å skifte verdi i alle bit.
- Vi kommer ikke til å jobbe så mye med digital representasjon av mengder.
- Når vi kommer til kompleksitetsteori, og vi spør om kompleksiteten til et problem som involverer mengder, trenger vi å vite hvordan mengder representeres digitalt.

Kardinaltall

- Hvis vi i noen sammenhenger ønsker å bruke digitale representasjoner av mengder, er det viktig at $\mathcal{E}$ ikke får lov til å være for stor.
- $10^{10^{10}}$ er lett å skrive, men foreløpig har vi ingen datamaskin med så mange bit.
- For å kunne følge med på hvor store mengder vi opererer med, og for å kunne resonnere omkring størrelse på mengder, er det en fordel med en notasjon for størrelsen av mengder.
- Det er dette vi vil fange opp i begrepet kardinaltall.

Kardinaltall

Definisjon

- La A være en endelig mengde.
- Med kardinaltallet til A mener vi antall elementer i A.
- Vi skriver $|A|$ for kardinaltallet til A.

Eksempel

- Hvis $A = \{2, 3, 17, 5, 23, 12, 15\}$ er $|A| = 7$.
- Hvis $B = \{n \in \mathbb{N} : 2n + 1 < 17\}$ er $|B| = 7$.
- Hvis $C = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\}$ er $|C| = 3$.
- Hvis $D = \{x \in \mathbb{J} : x^2 = 64\}$ er $|D| = 2$.

Kardinaltall

Vi skal se på en enkel setning om kardinalitet som kan bli nyttig i avsnittet om kombinatorikk.
Det er en setning som har sin parallell i sannsynlighetsteori, og i mange andre sammenhenger hvor man på en eller annen måte måler størrelse på mengder.

Teorem

La A og B være to endelige mengder.

Da er

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$

Kardinaltall

Bevis

Først observerer vi at hvis C, D og E er vilkårlige disjunkte mengder, så vil

$$|C \cup D \cup E| = |C| + |D| + |E|.$$

Så lar vi $C = A - B$, $D = A \cap B$ og $E = B - A$.

Fra Venn-diagrammet ser vi at disse er disjunkte.

Da er

- $|A \cup B| = |C| + |D| + |E|$
- $|A| = |C| + |D|$
- $|B| = |D| + |E|$

Teoremet følger da ved enkel regning.

Til de som ikke kom til forelesningen: Noe ble forklart ved Venn-diagrammer på tavlen.

Kardinaltall

Eksempel

- Hvis alle 16 spillerne på et håndball-lag må kunne brukes i angrep eller forsvar, og vi vet at 7 av spillerne kan brukes i begge posisjoner og at 12 av spillerne kan brukes i forsvar, setter vi opp en likning for antall spillere som kan brukes i angrep:
- $$16 + 7 = x + 12.$$
- Det gir at 11 spillere kan brukes i angrepsspillet.
- Fra Venn-diagrammet ser vi at det vil være fire spillere som bare kan brukes i angrep, og fem spillere som bare kan brukes i forsvar.

Kardinaltall

- Den tyske matematikeren *Georg Cantor* utviklet en teori for kardinaltallet til en uendelig mengde også.
- Dette skjedde i siste halvdel av 1800-tallet.
- Ut fra Cantors definisjon fins det like mange rasjonale tall og hele tall som naturlige tall, mens det fins ekte flere reelle tall.
- Vi skal begrense oss til kardinalitet av endelige mengder.
- Selv om datamaskiner av natur bare kan håndtere endelig mye informasjon, har imidlertid studiet av uendelige mengder også en plass i informatikken.
- Dette faller ofte utenfor rammen til diskret matematikk og derfor utenfor pensum i MAT1030.

Kardinaltall

Eksempel

a) La $A = \{0, 1, 2\}$.

Da har A 8 delmengder: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$ og $\{0, 1, 2\}$.

Disse er skrevet opp i en usystematisk rekkefølge.

En mer systematisk måte vil være først å skrive den ene delmengden av $\emptyset$: $\emptyset$,

så resten av delmengdene av $\{0\}$: $\{0\}$

så resten av delmengdene av $\{0, 1\}$: $\{1\}$ og $\{0, 1\}$

og til slutt resten av delmengdene av $\{0, 1, 2\}$: $\{2\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$ og $\{0, 1, 2\}$

Kardinaltall

Eksempel (Fortsatt)

Den naturlige rekkefølgen blir da

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

b) For å liste opp alle delmengder av $\{0,1,2,3\}$ lister vi først opp alle delmengder av $\{0,1,2\}$ og deretter alle nye delmengder, ved å legge 3 til en av de åtte første.

Det gir

$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\},$

$\{3\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}, \{2,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

Potensmengder

Definisjon

- La A være en mengde.
- Med potensmengden til A mener vi mengden av alle delmengder av A.

Merk

- Hvis A er en mengde og $B \subseteq A$ er en vilkårlig delmengde, vil vi for hver $x \in A$ ha to muligheter, $x \in B$ og $x \notin B$.
- En konsekvens er at hvis A er endelig vil potensmengden til A ha $2^{|A|}$ elementer.
- Dette vil ofte bety at det vil ta alt for lang tid å gjennomføre naive algoritmer.

Potensmengder

Eksempel

- La A være en endelig mengde av naturlige tall.
- Vi lar $\sum A$ bety summen av alle tallene i A.
- Partisjonsproblemet er om det fins delmengder B og C av A som er slik at
  1. $A = B \cup C$
  2. $\emptyset = B \cap C$ (de er disjunkte)
  3. $\sum B = \sum C$
- Den første strategien for å løse dette problemet kan være å liste opp alle par $B \subseteq A$ og $C = A - B$, og sjekke, men hvis A har 1000 elementer, er ikke dette praktisk gjennomførbart.
- Ingen vet per i dag om det fins en vesentlig raskere metode for å løse partisjonsproblemet generelt.
- Partisjonsproblemet er et eksempel på et NP-komplett problem.

Potensmengder

Merk

- Potensmengden til A er definert selv om A er uendelig.
- I det tilfellet er ikke alle egenskapene ved potensmengder fullstendig klarlagt ennå.
- Vi ledes langt ut over rammene for diskret matematikk om vi prøver å forstå potensmengden til en uendelig mengde.
- Cantor viste at i en viss forstand er potensmengden til A alltid ekte større enn A.

Ordnede par

- Vi har brukt mengden $\mathbb{R}^2$ av tallpar i tidligere eksempler.
- Alle vet at det er forskjell på tallparene $(2, 3)$ og $(3, 2)$ i $\mathbb{R}^2$.
- Det betyr at rekkefølgen på tallene i paret spiller en rolle.
- Et slikt par kaller vi et ordnet par.

Ordnede par

- Det er ikke bare tall som kan opptre i par.
- Vi kan for eksempel skrive at

  Per og Kari er ektefeller

  og vi mener så absolutt at de utgjør et par.
- I dette tilfellet betyr ikke rekkefølgen noe, men skriver vi

  Kari er kona til Per

  kan vi ikke erstatte det med

  Per er kona til Kari.

Ordnede par

- Vi trenger begrepet ordnet par for å kunne snakke presist og generelt om visse former for sammenhenger vi kan finne mellom to objekter.
- Disse objektene kan være tall i en tallmengde.
- De kan imidlertid også være data i en base, data som representerer personer, hendelser, adresser, yrker og mye annet det kan være behov for å registrere.
- Derfor vil vi legge en helt generell definisjon til grunn, når vi definerer hva som menes med et ordnet par.

Ordnede par

Definisjon

La a og b være to objekter.

Det ordnede paret (a, b) av a og b er a og b skrevet i rekkefølge.

To ordnede par (a, b) og (c, d) er like hvis $a = c$ og $b = d$.

Merk

- Vi har egentlig ikke sagt hva et ordnet par er for noe, bare knyttet det til at objektene settes i rekkefølge.
- Det er definisjonen av når to ordnede par er like som gir oss den ønskede matematiske presisjonen. Det knytter den abstrakte definisjonen opp til skrivemåten vi benytter.

Ordnede par

Definisjon

La A og B være to mengder.

Med det kartesiske produktet $A \times B$ av A og B mener vi

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A \land b \in B\}.$$

Betegnelsen henter sitt navn fra den franske matematikeren og filosofen René Descartes.

Ordnede par

Eksempel

- La A være mengden av registrerte norske skøyteløpere og B være mengden av tider mellom 1.30.00 og 2.30.00.

  Da vil registreringer av personlige rekorder på 1500m oppfattes som par i $A \times B$
- Hvis A er mengden av ord skrevet med latinske bokstaver og B er mengden av sider på nettet, leter vi i prinsippet gjennom $A \times B$ når vi søker etter nettsider hvor et bestemt ord forekommer.

  I dette tilfellet er det klart at vi trenger å utvikle spesielle teknikker for å kunne gjøre dette på en effektiv måte, men utviklingen av slike teknikker starter med å forstå kompleksiteten av $A \times B$.

Ordnede par

Hvis A og B er endelige mengder, vil

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

For de som har lært om matriser, ser vi sammenhengen med en $n \times m$-matrise.

La $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ og $B = \{b_1, \cdots, b_m\}$.

Da kan vi skrive $A \times B$ som:

Ordnede par

$$
\left\{
\begin{array}{ccc}
(a_1, b_1) & \cdots\cdots & (a_1, b_m) \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
(a_n, b_1) & \cdots\cdots & (a_n, b_m)
\end{array}
\right\}
$$