Obligatorisk oppgave 1 i MAT1030, Vår 2010.

Løsningsforslag.

Oppgave 1

a) Ved å sette opp sannhetsverditabellen, ser vi at utsagnet er en tautologi.

p	q	r	$p \to q$	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$(p \to q) \to (p \to (q \vee r))$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T

b) Ved å sette opp sannhetsverditabellen, ser vi at utsagnet hverken er en tautologi eller en kontradiksjon.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$\neg(q \to r)$	$(p \to q) \wedge \neg(q \to r)$
T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	F	F

c) Ved å sette opp sannhetsverditabellen, ser vi at utsagnet hverken er en tautologi eller en kontradiksjon.

p	q	r	$p \to q$	$\neg(r \to p)$	$(p \to q) \land \neg(r \to p)$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

d) Ved å sette opp sannhetsverditabellen, ser vi at utsagnet er en kontradiksjon.

p	q	r	$\neg(p \to q)$	$\neg(r \to p)$	$\neg(p \to q) \land \neg(r \to p)$
T	T	T	F	F	F
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	F	F

Oppgave 2

a)

- $\neg(p \lor \neg(\neg q \lor r)) \equiv$
  $\neg p \land \neg\neg(\neg q \lor r) \equiv$
  $\neg p \land (\neg q \lor r)$
- $\neg((p \land q) \lor (\neg p \land r)) \equiv$
  $\neg(p \land q) \land \neg(\neg p \land r)) \equiv$
  $(\neg p \lor \neg q) \land (\neg\neg p \lor \neg r) \equiv$
  $(\neg p \lor \neg q) \land (p \lor \neg r)$.
- $p \lor \neg(\neg p \land q) \equiv$
  $p \lor (\neg\neg p \lor \neg q) \equiv$
  $p \lor p \lor \neg q \equiv$
  $p \lor \neg q$.

b) Vi tar forklaringen først:

Vi bruker z som outputvariabel, med startverdi **JA**. Ved hjelp av pseudokoden, vil vi kontrollere hvert av de fire kriteriene som er oppgitt, og finner vi ut at et av de ikke holder, lar vi z få verdien **NEI**
Intruksjon 4. sjekker om $\neg$ bare står foran en utsagnsvariabel.
Instruksjonene 5. og 6. sjekker om symbolene henholdsvis rett til venstre og rett til høyre for en $\wedge$ og en $\vee$ er av rett form.
Instruksjonene 7. - 9. er en transkripsjon av den pseudokoden vi har presentert i forelesningen, og som sjekker om parentessettingen er riktig.
Vi vil bruke fete typer, som i **or**, for å skille mellom de symbolene vi har i inputsekvensen og de bindeordene vi bruker i boolsk-verdi tester.

1. *input* n [lengden av symbolsekvensen]
2. *input* $a_1, \ldots, a_n$ [symbolsekvensen]
3. $z \leftarrow$ **JA**
4. **for** $i = 1$ **to** n **do**
   - 4.1 **if** $a_i = \neg$ **then**
     - 4.1.1 **if** $i = n$ **or** $a_{i+1} \notin \{p, q, r\}$ **then**
       - 4.1.1.1 $z \leftarrow$ **NEI**
5. **for** $i = 1$ **to** n **do**
   - 5.1 **if** $a_i \in \{\wedge, \vee\}$ **then**
     - 5.1.1 **if** $i = 1$ **or** $a_{i-1} \notin \{p, q, r,)\}$ **then**
       - 5.1.1.1 $z \leftarrow$ **NEI**
6. **for** $i = 1$ **to** n **do**
   - 6.1 **if** $a_i \in \{\wedge, \vee\}$ **then**
     - 6.1.1 **if** $i = n$ **or** $a_{i+1} \notin \{p, q, r,)\}$ **then**
       - 6.1.1.1 $z \leftarrow$ **NEI**
7. $x \leftarrow 0$
8. **for** $i = 1$ **to** n **do**
   - 8.1 **if** $a_i =$ (**or** $a_i =$) **then**

8.1.1 **if** $a_i = ($ **then**
  8.1.1.1 $x \leftarrow x + 1$
  else
  8.1.1.2 **if** $x = 0$ **then**
    8.1.1.2.1 $z \leftarrow$ **NEI**
    else
    8.1.1.2.2 $x \leftarrow x - 1$

9. **if** $x > 0$ **then**
   9.1 $z \leftarrow$ **NEI**
10. *output* z

Oppgave 3

a)
1. *input* x
2. *input* y
3. **while** $x = 0 \vee y > 0$ **do**
   3.1 $x \leftarrow x - 1$
   3.2 $y \leftarrow y - 1$
   3.3 $z \leftarrow z + 1$
4. *output* z

De tre beregningene vil, trinn for trinn, bestå av følgende omskrivninger av verdiene på x, y og z:

$x := 2$, $y := 3$, $z := 0$, $x := 1$, $y := 2$, $z := 1$, $x := 0$, $y := 1$, $z := 2$, $x := -1$, $y := 0$, $z := 3$, output $z = 3$.

$x := 3$, $y := 2$, $z := 0$, $x := 2$, $y := 1$, $z := 1$, $x := 1$, $y := 0$, $z := 2$, $x := 0$, $y := -1$, $z := 3$, output $z = 3$.

$x := 3$, $y := 3$, $z := 0$, $x := 2$, $y := 2$, $z := 1$, $x := 1$, $y := 1$, $z := 2$, $x := 0$, $y := 0$, $z := 3$, output $z = 3$.

b) Vi skal vise at

$$\min\{x, y\} + |x - y| = \max\{x, y\}.$$

Vi deler beviset opp i to tilfeller:

Tilfelle 1

$x \leq y$.
Da er $\min\{x, y\} = x$, $|x - y| = y - x$ og $\max\{x, y\} = y$.
Det følger at

$$\min\{x, y\} + |x - y| = x + (y - x) = y = \max\{x, y\}.$$

Tilfelle 2

$y < x$.
Vi ser at dette tilfellet dekkes av Tilfelle 1, hvis vi bytter x og y i Tilfelle 1.

Siden alle muligheter er dekket, er påstanden bevist. Vi har ikke brukt noen form for kontrapositivt bevis her, men bevis ved tilfeller.

Oppgave 4

a) Vi uttrykker at en ordning ikke er total ved å negere utsagnet som uttrykker at den er total, så den enkleste godtagbare løsningen blir

$$\neg\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x).$$

b) Vi må vise at de to aksiomene for ordninger gitt i oppgaveteksten holder for inklusjon, og finne et eksempel på at ordningen ikke er total.

Aksiom1: Hvis B og C er delmengder av A slik at $B \subset C$ og $C \subset B$ vil vi både ha at mengdene må være like, siden de er inneholdt i hverandre, og forskjellige, siden vi har ekte inklusjon. Det er umulig, så det første aksiomet holder.

Aksiom2: Hvis $B \subset C$ og $C \subset D$, vil $B \subset D$ fordi ekte inklusjon er transitiv.
Det er akkurat det som uttrykkes i aksiom 2.

La a og b være to forskjellige elementer i A. Da er $\{a\}$ og $\{b\}$ to forskjellige elementer av X slik at vi ikke har ekte inklusjon noen av veiene. Det viser at ordningen ikke er total.

Vi kan la uttrykket $C \subseteq D$ stå for utsagnet $C \subset D \vee C = D$.

c) Det finnes et største element:

$$\exists D \in X \forall C \in X (C \subseteq D).$$

Det finnes et minste element:

$$\exists C \in X \forall D \in X (C \subseteq D).$$

d)

$$D = B \cup C \Leftrightarrow B \subseteq D \wedge C \subseteq D \wedge \forall E (B \subseteq E \wedge C \subseteq E \rightarrow D \subseteq E).$$

$$D = B \cap C \Leftrightarrow D \subseteq B \wedge D \subseteq C \wedge \forall E (E \subseteq B \wedge E \subseteq C \rightarrow E \subseteq D).$$

SLUTT