MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 6: Utsagnslogikk og predikatlogikk

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

3. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-03 12:49)

Kapittel 4: Logikk

Oppsummering

- Vi har nå innført de fem utsagnslogiske bindeordene

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow .$$

- For hvert av disse bindeordene, eller konnektivene, har vi definert betydningen av dem ved en sannhetsverditabell.
- Vi har sett på hvordan vi kan bygge opp sannhetsverditabeller for sammensatte utsagn.
- Vi fortsetter nå med innføringen av utsagnslogikk.

"En digresjon"

- Hvis vi ønsker å være helt formelle, kan vi definere formelle utsagnslogiske uttrykk på følgende måte, hvor vi skiller mellom variable for grunnutsagn og sammensatte utsagn:
  - Utsagnskonstatene **T** og **F** er utsagn.
    (Som logikere burde vi være enda mer forsiktige her, men vi skal ikke skille mellom en konstant og dens verdi i dette kurset.)
  - Alle utsagnsvariable $p_1, \ldots, p_n$ er utsagn.
  - Hvis p og q er utsagn, er $\neg p$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ og $(p \leftrightarrow q)$ også utsagn.
- En slik definisjon kaller vi en induktiv, eller en rekursiv, definisjon.
- Når vi gir en slik definisjon, begrenser vi bruken av ordet utsagn fra noe vagt, slik vi gjorde det innledningsvis, til noe matematisk presist.
- Vi har en klar parallell i definisjonen av visse programmeringsspråk.
- Vi skal komme tilbake til en mer systematisk drøfting av slike definisjoner litt senere i semesteret.

Oppbygging av utsagn

- Den induktive oppbyggingen av utsagn forteller oss at vi har grunnutsagn og sammensatte utsagn, men også at noen utsagn er mer sammensatte enn andre.
- Når vi kommer til kapitlene om grafer og trær, vil vi se at et sammensatt utsagn kan betraktes som en trestruktur, hvor det gitte utsagnet ligger ved roten, og treet forgrener seg gjennom stadig mindre sammensatte delutsagn, helt til vi finner utsagnsvariablene ved bladene.
- Det første bindeordet vi kommer til når vi skal løse opp et utsagn i delutsagn kalles hovedkonnektivet eller, analogt med i boka, prinsipalkonnektivet.
- Dette illustreres på tavlen.

Mer om parenteser

Eksempel

$$(p \land q \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$$

- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at $\land$ og $\lor$ skiller mer enn $\neg$.
- Vi skal også la $\to$ og $\leftrightarrow$ skille mer enn $\land$ og $\lor$.
- Det betyr at utsagnet over egentlig skal være

$$(((p \land q) \to r) \to ((p \to r) \lor (q \to r))),$$

noe som ikke akkurat er lettere å lese.

Mer om parenteser

- Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen.
- Som eksempel skriver vi ut en sannhetsverditabell basert på trestrukturen.
- Vi oppdager at kolonnen under det prinsipale konnektivet vil inneholde **T** i alle linjer.
- Det betyr at utsagnet er sant uansett hvilke grunnutsagn vi setter inn for p, q og r.
- Da må $(p \to r) \lor (q \to r)$ være en logisk konsekvens av $p \land q \to r$.

  (Vi skal snart definere hva vi mener med logisk konsekvens helt presist.)
- På neste side skal vi se et eksempel på at en ukritisk tolkning av dette i dagligtale gir noe meningsløst.

Mer om parenteser

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgiften".
- La q stå for "Jeg får godkjent obligene".
- La r stå for "Jeg kan gå opp til eksamen".
- Da er
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.

  en logisk konsekvens av
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften og får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.

  Er det noe galt her, og i så fall hva?

Mer om parenteser

- Hvordan skal vi forstå utsagn som

$$p \wedge q \wedge r$$

og

$$p \vee q \vee r$$

- I slike tilfeller vil vi få den samme høyrekolonnen i sannhetsverditabellen uansett hvordan vi setter parentesene, så vi kan like godt la det være.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

- La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.
- A er en tautologi hvis A får verdien **T** for alle fordelinger av sannhetsverdier på $p_1, \ldots, p_n$, det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare **T** i høyre kolonne.
- Vi kunne brukt ordene selvoppfyllende eller selvforklarende på norsk, men holder oss til det internasjonalt brukte tautologi.
- Hvis sannhetsverdien til A derimot alltid blir **F**, kaller vi A en kontradiksjon eller en selvmotsigelse.
- En tautologi er, med andre ord, et utsagn som alltid er sant, og en kontradiksjon er et utsagn som alltid er usant.

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \to (q \to p)$ er en tautologi.
- $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ er en tautologi.
- $(p \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ er en kontradiksjon.
- $\neg p \to (p \to q)$ er en tautologi.

  Noe av dette har vi regnet på, noe er gitt som oppgaver og resten kan dere godt betrakte som oppgaver.

Logisk ekvivalens

Eksempel $(\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

Eksempel $(\neg(p \vee q))$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
T	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**

Vi ser at høyrekolonnene er identiske.

Logisk ekvivalens

Definisjon

- La A og B være to utsagnslogiske uttrykk.
- Vi sier at A og B er logisk ekvivalente hvis A og B har samme sannhetsverdi uansett hvilke verdier vi gir til utsagnsvariablene.
- Vi skriver
$$A \equiv B$$
når A og B er logisk ekvivalente.

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$
- $\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$
- $\neg\neg p \equiv p$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \mathbf{T}$

Som øvelser bør dere sette opp alle sannhetsverditabellene, og kontrollere at påstandene holder.

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

- La A og B være sammensatte utsagn.
- B er en logisk konsekvens av A dersom $A \rightarrow B$ er en tautologi.
- Vi skriver ofte $A \Rightarrow B$ når B er en logisk konsekvens av A.

- Merk at uttrykk som $A \equiv B$ og $A \Rightarrow B$ ligger på utsiden av den formelle utsagnslogikken.

Logiske lover

- Tabell 4.12 på side 56 i læreboka (Side 55 i utgave 2) lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt "laws of logic".
- Poenget er at man kan regne på et uttrykk ved å bruke disse reglene på deluttrykk, for derved å prøve å forenkle det.
- Det er et faktum (vi ikke skal bevise nå) at vi kan regne oss frem til **T** fra enhver tautologi.
- Vi skal ikke drille inn bruk av disse lovene, men at disse lovene virkelig kan brukes som regneregler, bør bevises, og det skal vi gjøre nå:

Logiske lover

Teorem

- La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.
- La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.
- Da er $A \equiv D$.

Bevis

- I sannhetsverditabellen for A har vi en kolonne for B, og det er bare verdiene i denne kolonnen vi bruker videre.
- Vi ville fått samme sluttresultat om vi hadde brukt en kolonne for C i stedet for den identiske kolonnen for B.
- Dette svarer til å sette opp sannhetsverditabellen for D.

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:
  - DeMorgans lover:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

  - Distributive lover:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Vi skal snart se på et eksempel på hvordan vi kan vise at et sammensatt utsagn er en tautologi ved å bruke disse regnereglene.
- Vi henviser til betegnelsene i tabellen på side 56 (55).

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke dem, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere $\leftrightarrow$ og $\rightarrow$, flytte alle forekomster av $\neg$ så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.
- Hvis A er et sammensatt utsagn, kan vi "løse likningen" $A = \mathbf{F}$ med hensyn på utsagnsvariablene.

  Hvis likningen ikke har løsning, så er A en tautologi.
- Hva som er mest hensiktsmessig avhenger av hvordan det sammensatte utsagnet ser ut.

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p)$

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p$
- $\neg((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee p$ [Eliminasjon av $\rightarrow$]
- $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee p$ [Bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg\neg q) \vee p$ [To gangers bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg\neg q)) \vee p$ [Distributiv lov]
- $(\neg p \wedge \mathbf{T}) \vee p$ [Invers lov]
- $\neg p \vee p$ [Identitetsloven]
- $\mathbf{T}$ [Invers lov]

Bruk av regneregler

- Vi antydet også at det er mulig å vise at et sammensatt utsagn A er en tautologi ved å vise at likningen

$$A = \mathbf{F}$$

ikke holder.
- Vi skal gi ett eksempel på hvordan vi kan "løse" slike likninger.
- Metoden kan være nyttig når A har mange forekomster av $\rightarrow$.
- Programmeringsspråket *PROLOG* er basert på en systematisering av denne metoden, koblet med predikatlogikk.

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))$

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) = \mathbf{F}$
2. $p \rightarrow q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)
4. $q \rightarrow r = \mathbf{T}$ (Fra 3.)
5. $p \rightarrow r = \mathbf{F}$ (Fra 3.)
6. $p = \mathbf{T}$ (Fra 5.)
7. $r = \mathbf{F}$ (Fra 5.)
8. $q = \mathbf{F}$ (Fra 4 og 7.)
9. $p = \mathbf{F}$ (Fra 2 og 8)
10. $p \neq p$ (Fra 6 og 9.)

En oppgave

Oppgave

a) Vis at hvis A, B og C er sammensatte utsagn, så vil

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

og at

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A).$$

b) Forklar hvorfor dette betyr at rekkefølge og parentessetting ikke betyr noe i et utsagnslogisk uttrykk som bare bruker bindeordet $\leftrightarrow$

c) [Vanskelig] Hvordan kan vi lett avgjøre om et slikt uttrykk er en tautologi eller ikke?

Predikatlogikk

- Utsagnslogikk er enkel i den forstand at gitt et utsagnslogisk uttrykk er det muligens tidkrevende, men i prinsippet enkelt, å avgjøre om vi står overfor en tautologi, en kontradiksjon eller noe annet.
- Utfordringen i utsagnslogikk er å finne algoritmer som raskt kan løse denne typen problemstillinger for sammensatte utsagn (med mange utsagnsvariable) som forekommer i praktiske anvendelser.
- Utsagnslogikken er også enkel i den forstand at den er uttrykksfattig, det er mange tilsynelatende logiske slutninger som ikke kan presses inn i formatet til tautologier.
- Vi skal starte med et eksempel.

Predikatlogikk

Eksempel

Anta at vi vet følgende:

- All fluesopp er giftig.
- Det fins sopp som ikke er giftig.

Da må vi ha lov til å konkludere med

- Det fins sopp som ikke er fluesopp.

Eksempel

- Vi vet følgende:
  - Alle kvadrattall er $\geqslant 0$.
  - Det fins tall som ikke er $\geqslant 0$

  Da konkluderer vi med
  - Det fins tall som ikke er kvadrattall.

Dette er det samme argumentet i to forkledninger.