

# MAT1030 – Diskret Matematikk

## Forelesning 12: Relasjoner

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

24. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-24 12:36)



# Kapittel 5: Relasjoner

## Repetisjon

- En **relasjon** på en mengde  $A$  er en delmengde  $R \subseteq A \times A = A^2$ .
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

### Definisjon

- En relasjon  $R$  på en mengde  $A$  kalles:
  - **Refleksiv** hvis  $xRx$  for alle  $x \in A$ .
  - **Irrefleksiv** hvis vi ikke har noen  $x \in A$  slik at  $xRx$ .
  - **Symmetrisk** hvis  $xRy$  medfører  $yRx$  for alle  $x, y \in A$ .
  - **Antisymmetrisk** hvis  $xRy \wedge yRx$  medfører at  $x = y$  for alle  $x, y \in A$ .
  - **Transitiv** hvis  $xRy \wedge yRz$  medfører  $xRz$  for alle  $x, y, z \in A$ .

## Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er **ekvivalensrelasjonene**. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

### Eksempel

a) La  $A = \{0, \dots, 9\}$ .

Hvis  $a$  og  $b$  er elementer i  $A$  lar vi  $aRb$  hvis  $a - b$  er delelig med 3.

Vi ser at  $R$  deler  $A$  opp i tre disjunkte mengder  $B = \{0, 3, 6, 9\}$ ,  $C = \{1, 4, 7\}$  og  $D = \{2, 5, 8\}$ , hvor hver mengde består av tall som står i innbyrdes relasjon til hverandre, mens vi ikke har noen  $R$ -forbindelser på mengdene imellom.

## Ekvivalensrelasjoner

### Eksempel (Fortsatt)

b) La  $A = \mathbb{R}^2$  og la

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Vi ser at to punkter står i R-relasjon til hverandre nøyaktig når avstanden til origo er den samme.

Denne relasjonen deler  $\mathbb{R}^2$  opp i uendelig mange disjunkte mengder, nemlig sirklene om origo med radius  $r$  for  $r \geq 0$ .

## Ekvivalensrelasjoner

### Eksempel (Fortsatt)

c) La  $A = \mathbb{Q}$  og la  $pRq$  om  $p$  og  $q$  har den samme *heltallsverdien*. Heltallsverdien til et tall  $p$  er det største hele tallet  $a \leq p$ .

I alle disse eksemplene har vi definert en relasjon  $R$  ved at to objekter står i relasjon til hverandre når de deler en viss felles egenskap.

Det er denne typen relasjoner vi vil kalle *ekvivalensrelasjoner*.

## Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.  
Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.
- Hvis  $a$  og  $b$  deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at  $b$  og  $a$  deler denne egenskapen.
- Det er altså et rimelig krav til at en relasjon skal kalles en ekvivalensrelasjon at den er *symmetrisk*.
- Hvis  $a$  og  $b$  deler en egenskap, og  $b$  og  $c$  deler den samme egenskapen, er den også felles for  $a$  og  $c$ .  
Vi vil kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *transitiv*.

## Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuisjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”.  
Den formelle definisjonen er:

### Definisjon

La  $R$  være en relasjon på en mengde  $A$ .

Vi kaller  $R$  en *ekvivalensrelasjon* om  $R$  er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

## Ekvivalensklasser

- En viktig egenskap ved en ekvivalensrelasjon  $R$  på en mengde  $A$  er at  $R$  deler  $A$  opp i disjunkte mengder av parvis ekvivalente elementer i  $A$ .  
(Disjunkt betyr at snittet er tomt.)
- Disse mengdene kaller vi **ekvivalensklasser**.
- Vi skal vise denne egenskapen ved ekvivalensrelasjoner helt generelt, men la oss se på noen eksempler først.

## Ekvivalensklasser

### Eksempel

- La  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- La  $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$
- I utgangspunktet er det ikke så lett å se hvilke egenskaper  $R$  har, men beskriver vi  $R$  på matriseform blir bildet klarere:

## Ekvivalensklasser

### Eksempel (Fortsatt)

T	T	F	F	F	F
T	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T

Vi ser at  $aRb$  hvis og bare hvis  $a$  og  $b$  tilhører den samme av delmengdene  $\{0, 1\}$ ,  $\{2\}$  og  $\{3, 4, 5\}$ .

## Ekvivalensklasser

### Eksempel

- Vi definerer relasjonen  $R$  på  $\mathbb{R}^2$  ved  $(x, y)R(u, v)$  om  $x + y = u + v$ .
- $R$  er en ekvivalensrelasjon.
- Hvis  $x + y = k$  vil  $(x, y)R(u, v)$  **hvis og bare hvis**  $u + v = k$ .
- Denne relasjonen deler planet opp i uendelig mange disjunkte deler, hvor delene er alle linjene med stigningstall  $-1$

## Ekvivalensklasser

### Definisjon

La  $R$  være en ekvivalensrelasjon på en mengde  $A$  og la  $a \in A$ .  
Vi lar **ekvivalensklassen** til  $a$  være

$$E(a) = \{b \in A \mid aRb\}.$$

## Ekvivalensklasser

### Teorem

La  $R$  være en ekvivalensrelasjon på mengden  $A$ ,  $E(a)$  ekvivalensklassen til  $a \in A$ .

- For alle  $a \in A$  vil  $a \in E(a)$ .
- Hvis  $aRb$  vil  $E(a) = E(b)$ .
- Hvis  $\neg(aRb)$  vil  $E(a) \cap E(b) = \emptyset$

## Ekvivalensklasser

Dette teoremet sier nettopp at hvis  $R$  er en ekvivalensrelasjon på  $A$ , så vil vi dele  $A$  opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

### Bevis

Siden  $aRa$  vil  $a \in E(a)$ . Dette viser a).

La  $aRb$ . Skal vise at  $E(a) = E(b)$ .

Siden vi da også har at  $bRa$  er det nok å vise at  $E(b) \subseteq E(a)$  for å vise b).

Så la  $c \in E(b)$ .

Da vil  $aRb \wedge bRc$  så  $aRc$  fordi  $R$  er transitiv.

Det betyr at  $c \in E(a)$ .

Siden  $c \in E(b)$  var valgt vilkårlig, kan vi slutte at  $E(b) \subseteq E(a)$ .

## Ekvivalensklasser

### Bevis (Fortsatt)

Til sist, anta at  $c \in E(a) \cap E(b)$ .

Da vil  $aRc \wedge bRc$ .

Ved symmetri og transitivitet for  $R$  følger det at  $aRb$ .

Snur vi dette argumentet på hodet, får vi at

$$\neg(aRb) \Rightarrow E(a) \cap E(b) = \emptyset.$$

Dette viser c), og teoremet er bevist.

## Ekvivalensklasser

### Oppgave

La  $A$  være en mengde og la  $R$  og  $S$  være ekvivalensrelasjoner på  $A$ .

La  $T = S \cap R$

- Forklar hvorfor vi har at  $aTb$  hvis og bare hvis  $aRb \wedge aSb$  for alle  $a$  og  $b$  i  $A$ .
- Vis at  $T$  er en ekvivalensrelasjon.
- Finn et eksempel hvor  $R \cup S$  ikke er en ekvivalensrelasjon.

## Ordninger

- En annen type relasjoner som forekommer ofte er **ordninger**.
- Vi har en ordning når vi formaliserer “mindre eller lik”, “er svakere enn” og tilsvarende forhold.
- Vi tar definisjonen først, og illustrerer den med noen eksempler etterpå.
- Vi følger boka og definerer:

## Ordninger

### Definisjon

La  $A$  være en mengde med en relasjon  $R$ .

Vi kaller  $R$  en **partiell ordning** hvis

- $R$  er *refleksiv*
- $R$  er *transitiv*
- $R$  er *antisymmetrisk*.

## Ordninger

### Eksempel

- La  $\mathcal{E}$  være en universell mengde, og  $\subseteq$  være inklusjonsordningen på potensmengden til  $\mathcal{E}$ .
    - $\subseteq$  er *refleksiv* fordi  $A \subseteq A$  for alle mengder  $A$ .
    - $\subseteq$  er *transitiv* fordi  $A \subseteq B$  og  $B \subseteq C$  alltid vil medføre at  $A \subseteq C$
    - $\subseteq$  er *antisymmetrisk* fordi  $A = B$  når  $A \subseteq B$  og  $B \subseteq A$ .
- Dette viser at  $\subseteq$  er en partiell ordning.

## Ordninger

### Eksempel (Fortsatt)

- b) La  $\leq$  være den vanlige “mindre-eller-lik” relasjonen på  $\mathbb{J}$ .  
 $\leq$  er opplagt både refleksiv, transitiv og antisymmetrisk, så  $\leq$  er en partiell ordning.  
 $<$  er derimot **IKKE** en partiell ordning, fordi  $<$  ikke er *refleksiv*.
- c) Hvis vi ordner studentene i MAT1030 etter oppnådd karakter, med A øverst, F langt nede, men “ikke møtt” og “trukket seg før eksamen” enda lenger nede, har vi ikke en partiell ordning.  
Siden det er mer enn 8 studenter, må minst to stykker lide samme MAT1030-skjebne.  
Disse vil stå likt, men være forskjellige personer.  
Det betyr at denne relasjonen ikke er *antisymmetrisk*

## Ordninger

- Det er en viktig forskjell mellom ordningen av potensmengden til  $\mathcal{E}$  og ordningen av  $\mathbb{J}$ .
- Hvis vi har to tall  $a$  og  $b$  vil en av tre holde:
  1.  $a = b$
  2.  $a < b$
  3.  $b < a$
- For inklusjon har vi en fjerde mulighet, nemlig at ingen av  $A$  eller  $B$  er inneholdt i den andre.
- Vi fanger opp denne forskjellen i en definisjon:

## Ordninger

### Definisjon

La  $R$  være en partiell ordning på en mengde  $A$ .  
 $R$  kalles **total** dersom vi for alle  $a$  og  $b$  i  $A$  har at

$$aRb \vee bRa.$$

### Merk

- Det er for totale ordninger at vi har gode sorteringsalgoritmer.
- Utviklingen av slike algoritmer overlater vi til foreleserne i programmering, de er flinkere til å finne effektive algoritmer.

## En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnerer rundt de generelle definisjonene vi har gitt.
- Vi forventer ikke at studentene skal kunne løse slike oppgaver til eksamen.

### Oppgave

La  $R$  være en relasjon på en mengde  $A$ .  
Vi kaller  $R$  en **preordning** hvis  $R$  er transitiv og refleksiv.  
Definer relasjonen  $S$  på  $A$  ved  $aSb$  når  $aRb \wedge bRa$ .

- a) Vis at  $S$  er en ekvivalensrelasjon på  $A$ .  
Der er vanlig å skrive  $A/S$  for mengden av ekvivalensklasser  $E(a)$  til ekvivalensrelasjonen  $S$ .

## En utfordring

### Oppgave (Fortsatt)

Vi definerer en relasjon  $\hat{R}$  på  $A/S$  ved

$$E(a) \hat{R} E(b)$$

om  $aRb$

- b) Vis at det ikke spiller noen rolle hvilke elementer i ekvivalensklassene  $E(a)$  og  $E(b)$  vi bruker.
- c) Vis at  $\hat{R}$  er en partiell ordning på mengden av ekvivalensklasser.

## En digresjon

- Hvis  $A$  er en endelig mengde finnes det  $|A|^2$  elementer i  $A \times A$ , og

$$2^{|A|^2}$$

forskjellige relasjoner på  $A$ .

- Hvis eksempelvis  $|A| = 10$  vil det finnes  $2^{100}$  relasjoner på  $A$ .
- Hvis vi trekker en relasjon helt vilkårlig, ved eksempelvis myntkast for hvert par  $(a, b)$ , er sannsynligheten forsvinnende liten for at resultatet blir en av de **pene** relasjonstypene vi har sett på.