

MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 4: Logikk

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

27. januar 2010

(Sist oppdatert: 2010-01-27 12:48)



Kapittel 4: Logikk (fortsettelse)

Kort oppsummering

I går begynte vi å se på kapitlet om logikk.

Vi snakket litt om den historiske bakgrunnen for logikk, og om hvorfor informatikkstudenter bør lære seg logikk.

Vi så på to eksempler som skal illustrere at det i noen resonnementer vil finnes skjulte antagelser.

Eksemplene fra i går

Eksempel

- (a) Jeg rekker ikke middagen.
Du kommer senere hjem enn meg.
Altså rekker ikke du middagen.
- (b) Jeg rekker ikke middagen.
Hvis jeg ikke rekker middagen, rekker ikke du middagen.
Altså rekker ikke du middagen.

Eksempel

- (a) Jeg liker ikke Bamsemums.
Du liker alt jeg liker.
Altså liker ikke du Bamsemums.
- (b) Jeg liker ikke Bamsemums.
Hvis jeg ikke liker Bamsemums, liker ikke du Bamsemums.
Altså liker ikke du Bamsemums.

Logisk holdbart argument

Som en tommelfingerregel kan vi si følgende.

Et argument er *logisk holdbart* hvis vi kan bytte ut delformuleringer som ikke inneholder noe av den logiske strukturen med andre formuleringer uten at argumentet blir feil.

- Hovedutfordringen blir å bestemme hva som tilhører den logiske strukturen og hva vi kan forandre på for å bruke testen over.
- Et argument er logisk holdbart i kraft av sin *form*, ikke sitt *innhold*.

Logisk holdbart argument

- Hvis en datamaskin skal kunne sjekke gyldigheten av et resonnement, må vi eksplisere alle skjulte forutsetninger i resonnementet.
- Vi må også eksplisere hvilke atomære resonnementer som er lovlige, for en maskin kan bare kontrollere om noe er utført i tråd med forhåndsbestemte regler.
- Hvis en maskin skal kunne “forstå” hva som tilhører den logiske strukturen i en formulering, må den knyttes til bruk av spesielle tegn eller ordsekvenser.
- Dette er helt analogt med den rigiditeten som kreves av et program i et programmeringsspråk.

Fire viktige personer



Før vi starter på fagstoffet skal vi trekke frem fire navn som er viktige for utviklingen av logikk i det 20. århundre og for sammenfiltringen av matematisk logikk og teoretisk informatikk.

- Toralf Skolem (1887–1963)
- Kurt Gödel (1906–1978)
- Alan Turing (1912–1954)
- John von Neumann (1903–1957)

Hva skal vi lære av logikk?

- Utsagnslogikk
- Predikatlogikk
- Litt om hvordan man fører bevis
- Algoritmer for å teste om utsagn er logisk holdbare eller ikke

Utsagnslogikk

Definisjon

Et **utsagn** er en ytring som enten er sann eller usann.

- Som matematisk definisjon er ikke denne definisjonen spesielt god, ettersom den ikke kan brukes til å bestemme hva som er utsagn og hva som ikke er det.
- Er “Per er en dannet mann” et utsagn?
- Vi vil betrakte dette som et utsagn, ettersom ytringen i en gitt situasjon uttrykker en oppfatning som enten kan aksepteres eller bestrides.
- Vi skal ikke gå nærmere inn på den filosofiske analysen av hva et utsagn er.

Utsagnslogikk

Eksempel

Følgende er eksempler på utsagn, slik vi skal bruke begrepet:

- $2^{10} < 1000$
- $\pi \neq e$
- Anne har røde sko.
- I morgen blir det pent vær.
- Det fins mange grader av uendelighet.

Utsagnslogikk

Eksempel

Følgende ytringer kan ikke oppfattes som utsagn:

- Når går toget?
- Uff!!!
- Dra til deg den lurvete mærschedesen din, eller så kjører jeg på den! (Sitat fra sint trikkefører i Grensen.)
- Måtte sneen ligge lenge og løypene holde seg.

Utsagnslogikk

Eksempel

Vi har sett endel utsagn i forbindelse med formuleringer av kontrollstrukturer i pseudokoder:

- **While** $i > 0$ **do**
- **Repeat** \dots **until** $x > k$
- **If** x er et partall **then** \dots **else** \dots

Under en utregning vil verdiene på variablene endre seg, men ved hvert enkelt regneskritt vil “ytringene” enten være sanne eller usanne, og vi ser derfor på dem som utsagn.

Utsagnslogikk

Eksemplene på forrige side aktualiserer spørsmålet om matematiske likninger, ulikheter og andre formler hvor det forekommer variable størrelser kan betraktes som utsagn:

- $x^2 + 2x - 1 = 0$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $f(x) = f'(x)$

Det første tilfellet er en likning i variabelen x , det andre en kjent identitet fra trigonometrien og det siste en differensiallikning hvor f er den ukjente.

For at vi skal slippe å slåss om dette er eksempler på utsagn eller ikke, innfører vi et nytt begrep, et **predikat**.

Utsagnslogikk

Definisjon

Et **predikat** er en ytring som inneholder en eller flere variable, men som vil bli sann eller usann når vi bestemmer hvilke verdier variablene skal ha.

Eksempel

Alle eksemplene fra forrige side, $x^2 + 2x - 1 = 0$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ og $f(x) = f'(x)$, er eksempler på predikater. I de to første tilfellene er x variabelen, og i det siste tilfellet er både f og x variable.

Utsagnsvariable og sannhetsverdier

Det er ikke så viktig å vite hva et utsagn er. Det viktige er at når vi betrakter en ytring som et utsagn, stripper vi ytringen for alt untatt egenskapen at den vil være sann eller usann.

Vi vil bruke bokstaver p , q , r og liknende som **utsagnsvariable**, det vil si at de kan stå for et hvilket som helst utsagn.

Vi vil la **T** og **F** stå for de to **sannhetsverdiene** sann og usann (*true* og *false*).

Hver utsagnsvariabel p kan da ha en av verdiene **T** eller **F**.

Utsagnsvariable og sannhetsverdier

- Det finnes mange andre bokstaver eller symboler man kan anvende for å betegne sannhetsverdiene.
 - true og false
 - tt og ff
 - \top og \perp
 - True og False
 - sann og usann (ordet “gal” anbefales ikke)
 - **S** og **U**

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (og)

Eksempel

La oss se på følgende pseudokode:

1. Input x [$x \geq 0$, x heltall]
2. Input y [$y \geq 0$, y heltall]
3. **While** $x > 0$ og $y > 0$ **do**
 - 3.1. $x \leftarrow x - 1$
 - 3.2. $y \leftarrow y - 1$
4. $z \leftarrow x + y$
5. Output z

Dette er en algoritme for å beregne $|x - y|$ fra x og y .

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (og)

Definisjon

- Hvis p og q er to utsagn, er uttrykket $p \wedge q$ også et utsagn.
- Vi leser det p **og** q .
- $p \wedge q$ er sann hvis både p og q er sanne, ellers er $p \wedge q$ usann.
- Vi kaller ofte $p \wedge q$ for **konjunksjonen** av p og q .

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (og)

Definisjonen av når $p \wedge q$ er sann kan gis i form av en tabell.

En slik tabell kaller vi en **sannhetsverditabell**.

Utarbeidelsen av sannhetsverditabeller vil være en viktig ferdighet i dette kurset:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (og)

I en matematikk/informatikksammenheng er det greit å bruke symbolet \wedge :

- $3 \leq x \wedge x \leq 5$ er en helt grei formulering.
- **While** $x > 0 \wedge y > 0$ **do** kan være en alternativ måte å starte while-løkken fra eksemplet vårt på.
- Ofte vil man finne at man bruker samme typografi som for andre kontrollstrukturer i denne sammenhengen:
While $x > 0$ **and** $y > 0$ **do**
- I noen søkemotorer brukes **AND** med store bokstaver for å markere at man leter etter sider hvor to ord forekommer, eksempelvis

Gödel **AND** Turing.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (og)

Hvis man gjengir sammensetning av utsagn i dagligtale, er det bedre å bruke ordet “og”.

Man må imidlertid være klar over at den utsagnslogiske forståelsen visker ut noen av de nyansene vi kan legge inn i dagligtale.

I de to første eksemplene på neste side vil utsagnslogikken fange opp meningen, mens vi i de to neste mister mye av meningen.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (og)

Eksempel

1. Per er født i Oslo **og** Kari er født i Drammen.
2. Jeg liker å spille fotball **og** jeg liker å drive med fluefiske.
3. Jeg gikk inn i stua **og** tok av meg skiene.
Jeg tok av meg skiene **og** gikk inn i stua.
4. Jeg bestilte snegler til forrett **og** du forlot meg rasende
Du forlot meg rasende **og** jeg bestilte snegler til forrett.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (eller)

Det neste bindeordet vi skal se på er *eller*.

Dette ordet kan ha to betydninger, og vi må velge en av dem.

Dette kommer vi tilbake til etter et par eksempler.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (eller)

Eksempel

La oss ta utgangspunkt i følgende pseudokode:

1. Input x [$x \geq 0$, x heltall]
2. Input y [$y \geq 0$, y heltall]
3. $z \leftarrow 0$
4. **While** $x > 0$ eller $y > 0$ **do**
 - 4.1. $x \leftarrow x - 1$
 - 4.2. $y \leftarrow y - 1$
 - 4.3. $z \leftarrow z + 1$
5. Output z

Dette gir oss en algoritme for å beregne $\max\{x, y\}$.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (eller)

Hvis vi gir x og y store verdier n og m , vil både x og y ha positive verdier ved oppstart og etter noen få gangers tur i while-løkke.

Vi ønsker ikke at løkke skal stoppe av den grunn.

Derfor vil vi gjerne at et utsagn "p eller q" skal kunne være sant også når både p og q er sanne, i det minste i denne sammenhengen.

Er $2 \leq 3$? Er $3 \leq 3$?

I en matematisk sammenheng vil vi gjerne at begge deler skal være sanne, vil jo at $x \leq 3$ skal være oppfylt både av de tallene som er ekte mindre enn 3 og av 3 selv.

Det betyr at når et av leddene i et eller-utsagn er sant, vil vi at hele utsagnet skal være sant.

Vi vil bruke symbolet \vee for 'eller', og da er

$$x \leq y \text{ det samme som } x < y \vee x = y.$$

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (eller)

Definisjon

- Hvis p og q er to utsagn, er uttrykket $p \vee q$ også et utsagn.
- Vi leser det p **eller** q.
- $p \vee q$ er sann hvis p, q eller begge to er sanne, ellers er $p \vee q$ usann.
- Vi kaller $p \vee q$ for **disjunksjonen** av p og q.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (eller)

Definisjonen av når $p \vee q$ er sann kan også gis i form av en sannhetsverditabell:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (eller)

Eksempel

Følgende eksempler fra dagligtale viser at det er to forskjellige måter å forstå ordet 'eller' på

- Du kan få servere pølser **eller** du kan få servere pizza i bursdagsselskapet.
- Vil du ha en PC **eller** vil du ha en Mac?
- Jeg kommer til middag om toget er i rute **eller** om jeg får sitte på med en kollega.
- Om du leser VG **eller** om du leser Dagbladet finner du ikke noe stoff om hyperbolsk geometri.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (eller)

Vi skal bruke den **inklusive** betydningen av *eller*, og vi bruker symbolet \vee eller kontrollstrukturvarianten **or**.

Vi vil bruke dette bindeordet i en matematikk/informatikksammenheng, og være varsomme med å overføre den inklusive tolkningen til dagligtale.

Ekklusiv *eller* kan også defineres ved en sannhetsverditabell.

Dere utfordres til å gjøre dette selv.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (eller)

I enkelte programmeringssammenhenger, trenger vi å nyansere forståelsen av \vee og av \wedge ytterligere.

Anta at $P(\vec{x})$ og $Q(\vec{x})$ er to prosedyrer (\vec{x} er en vanlig måte å skrive en generell sekvens av variable på), slik at vi ikke kan være sikre på om de tilhørende programmene alltid terminerer.

Anta at vi bruker et programmeringsspråk som tillater kontrollstrukturer av tilnærmet form

If $P(\vec{x}) > 0$ **or** $Q(\vec{x}) > 0$ **then** ...

Skal vi da kunne fortsette når $P(\vec{x})$ ikke har noen verdi, men $Q(\vec{x}) > 0$?

Diskusjonen foregår muntlig på forelesningen.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (ikke)

Det neste ordet vi skal se på er **ikke** i betydningen *det er ikke slik at*.

Eksempel

- Månen er **ikke** full i morgen.
- Hurtigruta går **ikke** innom Narvik.
- Jeg rekker **ikke** middagen.
- Jeg liker **ikke** Bamsemums.

I alle disse tilfellene benekter vi en positiv påstand, eksempelvis "Jeg liker Bamsemums".

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (ikke)

Eksempel

1. Input x [$x \geq 1$ heltall]
2. Input y [y heltall, $1 \leq y \leq x$]
3. **While** $y \neq 0$ **do**
 - 3.1. $z \leftarrow y$
 - 3.2. $y \leftarrow \text{rest}(x, y)$ [$\text{rest}(x, y)$ gir restdelen når x deles på y]
 - 3.3. $x \leftarrow z$
4. Output x

Dette er en måte å formulere Euklids algoritme på (en måte å finne største felles faktor i to tall på).

Poenget her er formuleringen $y \neq 0$, en benektelse av at $y = 0$.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (ikke)

Vi vil bruke et spesielt tegn, \neg for å uttrykke at vi benekter et utsagn.

Definisjon

- Hvis p er et utsagn, er $\neg p$ et utsagn.
- $\neg p$ får sannhetsverdien **F** om p har sannhetsverdien **T** og $\neg p$ får sannhetsverdien **T** om p har sannhetsverdien **F**.
- Vi kaller $\neg p$ for **negasjonen** av p .

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (ikke)

Vi kan også gi denne definisjonen på sannhetsverditabellform:

p	$\neg p$
T	F
F	T

Denne tabellen er selvforklarende.