UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120B — Differensiallikninger og videregående lineær algebra med beregninger.
Eksamensdag:	Tirsdag 11. desember 2001.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelliste.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Sett

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn matrisen e^{tA} og den generelle løsningen på initialverdiproblemet

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = X_0,$$

der $X = (x, y)^T$ og $X_0 = (x_0, y_0)^T$ er en gitt vektor.

c) I resten av oppgaven lar vi A være en generell reell $n \times n$ matrise med elementer a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Vis at dersom B er en matrise som er similær med A, så har A og B samme karakteristiske polynom, dvs. $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.

d) La B være en matrise som er similær med A. Vis at

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii},$$

(Fortsettes side 2.)

der elementene i B er b_{ij}. (Hint: Dette kan vises direkte, men det er lettere å bruke formelen $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - \lambda^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right) +$ ... ledd av lavere orden enn $\lambda^{n-1} \ldots$, som du *ikke* skal bevise.)

e) For enkelhets skyld antar vi nå at A har n distinkte, men muligens komplekse egenverdier. Vis formelen

$$\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)},$$

der $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i a_{ii}$.

Oppgave 2.

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Forklar hvorfor A er ortogonalt diagonaliserbar, og vis at A har egenverdiene 0, 3 og 9.

b) Bestem egenvektorene til A, og finn en ortogonal matrise Q slik at $Q^T AQ$ er en diagonalmatrise.

c) La lineæravbildningen $L : \mathcal{P}^2 \mapsto \mathcal{P}^2$ være definert ved

$$L(p)(x) = 2p(1/2) + p(2)x - 2p(-1)x^2 + p''(0)\left(5x^2 - x - \frac{5}{4}\right).$$

Bestem matrisen til L i standardbasisen $\{1, x, x^2\}$, og finn basiser for (nullrommet) $N(L)$ og (rekkevidden) $R(L)$.

d) Klassifisér den kvadratiske formen

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + xy - 2xz + 2yz.$$

Svaret skal begrunnes.

Oppgave 3.

Anta at konstantene a_0, a_1 og b_1 er slik at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin^2 t - (a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t)\right)^2 \, dt$$

er minst mulig. Forklar, med mindre enn 30 ord, hvorfor a_0, a_1 og b_1 er Fourierkoeffisientene til $f(t) = \sin^2 t$. Finn a_0, a_1 og b_1.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 4.

a) Finn alle likevektspunktene for differensialligningen

$$\dot{x} = \rho x - x^3, \tag{1}$$

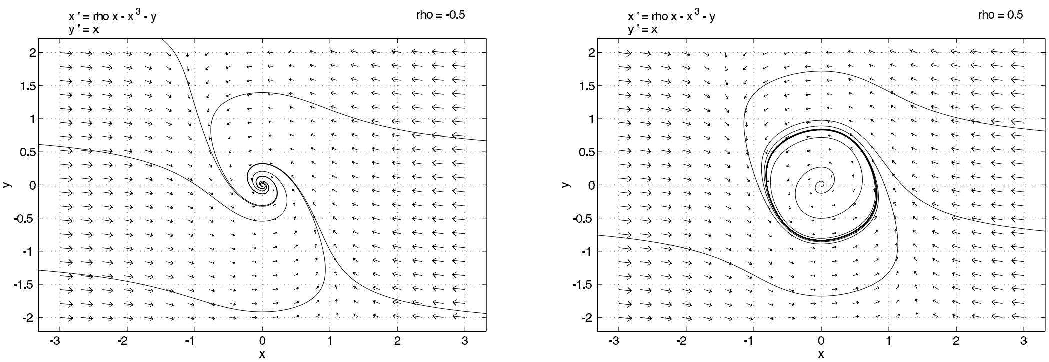
og bestem deres stabilitetsegenskaper. Tegn et bifurkasjonsdiagram for (1).

b) Vi utvider nå ligningen fra a) ved å legge til en variabel y,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho x - x^3 - y \\ \dot{y} &= x. \end{aligned} \tag{2}$$

Finn alle likevektspunkter til (2), og bestem deres stabilitetsegenskaper for forskjellige verdier av parameteren ρ.

c) Vi løser (2) numerisk og får følgende to faseportretter for $\rho = -0.5$ (til venstre) og $\rho = 0.5$ (til høyre).



Bruk disse faseportrettene til å tegne et bifurkasjonsdiagram for (2).

SLUTT