

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT 120B — Differensiallikninger
og videregående lineær algebra med
beregninger.

Eksamensdag: Torsdag 16. mai 2002.

Tid for eksamen: 09.00 – 15.00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Formelliste.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

- a) Finn den generelle løsningen på differensiallikningen

$$\dot{x} = 2(t - 1)e^{-x}. \quad (1)$$

Finn de spesielle løsningene gitt ved at $x(1) = 2$, og ved $x(0) = 0$.

- b) Finn den generelle løsningen på den lineære systemet av differensiallikninger

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X,$$

der $X = (x, y)^t$.

Oppgave 2.

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

og la B være standard basis for \mathbb{R}^3 .

(Fortsettes side 2.)

- a) Finn egenverdiene til A og en basis C bestående av egenvektorene til A .
- b) Finn en diagonalmatrise D og en matrise M slik at

$$M^{-1}AM = D.$$

- c) Finn overgangsmatrisen fra B til C og uttrykk vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

som en lineærkombinasjon av egenvektorer for A .

- d) Finn $A^4\mathbf{v}$.

Oppgave 3.

Gitt avbildningen $L : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$ ved $L(p)(t) = p(t + \pi/6)$.

- a) Forklar kort hvorfor L er lineær og finn matrisen A til L i basisen $\{1, \sin t, \cos t\}$. (Hint: $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.)
- b) Finn A^{12} .

Oppgave 4.

Vi skal studere det ikke-lineære systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\rho x + y \\ \dot{y} &= \frac{x^2}{1+x^2} - y, \end{aligned} \tag{2}$$

der ρ er en parameter som ligger i intervallet $\langle 0, 1 \rangle$.

- a) Finn alle likevektspunkter for (2), for alle verdier av $\rho \in \langle 0, 1 \rangle$.
- b) Bestem typen til likevektspunktene for $\rho \in \langle 0, 1/2 \rangle$.
- c) Tegn et (tilnærmet) faseportrett for $\rho = 0.3$. Faseportrettet skal omfatte alle likevektspunktene.
- d) Tegn et bifurkasjonsdiagram for (2) og $\rho \in \langle 0, 1 \rangle$.

SLUTT