UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120B — Differensiallikninger og videregående lineær algebra med beregninger.
Eksamensdag:	Lørdag 7. desember 2002.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelliste.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) Vi skal studere differensialligningen

$$x' = x^3 + \rho x, \tag{1}$$

der ρ er en reell parameter. Tegn et bifurkasjonsdiagram for (1).

b) Nå skal vi studere systemet

$$\begin{aligned} x' &= (r^2+\rho)x - 3y \\ y' &= 3x + (r^2+\rho)y \end{aligned} \tag{2}$$

der $r^2 = x^2 + y^2$, og ρ er en reell parameter. Tegn et faseportrett for (2) for $\rho = 1$ og et for $\rho = -1$.

c) Tegn et bifurkasjonsdiagram for (2).

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn en invertibel matrise S slik at

$$J = S^{-1}AS$$

er en matrise på reell Jordan normalform.

c) Finn e^{tA}.

d) Vis (f. eks. ved induksjon) at

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda & n \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

der $n = 1, 2, 3, \ldots$.

e) Løs ligningen

$$A^{10}X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

uten å bruke kalkulator.

Oppgave 3.

I denne oppgaven bruker vi indreproduktet i $\mathcal{P}_2$ gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 tp(t)q(t)\,dt.$$

(Du skal ikke vise at dette er et indreprodukt.)

a) Finn en ortonormal basis $\mathcal{B} = \{p_0, p_1\}$ for $\mathcal{P}_1$, der p_i er et polynom av grad i.

b) La $f(t) = t^2$, finn et førstegradspolynom $p(t)$ slik at

$$\|p - f\|$$

er minst mulig. Her er normen gitt av indreproduktet over.

c) La $L : \mathcal{P}_1 \mapsto \mathcal{P}_1$ være en lineæravbildning slik at $L(p_0) = 1$ og $L(p_1) = t$. Finn matrisen til L i standardbasisen $\{1, t\}$.

SLUTT