UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120B — Differensiallikninger og videregående lineær algebra med beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 16. mai 2003.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelliste.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & -8 \\ -5 & 4 & -4 \\ 10 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Vi vet at A har egenverdiene 1 og 2 (dette skal ikke vises).

a) Finn basiser for egenrommene E_1 og E_2 (det er mulig å velge basiser slik at alle vektorene har heltallskomponenter). Bruk dette til å finne en matrise Q slik at $Q^{-1}AQ$ er en diagonalmatrise.

b) Bestem en vektor $\mathbf{x}$ slik at

$$A^5\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 65 \\ 35 \\ -63 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La φ være en reell funksjon gitt ved

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{for } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

For heltall m og n sett

$$\varphi_n^m(x) = \varphi\left(n\left(x - \frac{m}{n}\right)\right).$$

La $\mathcal{G}_n$ være det lineære rommet utspent av φ_n^m for $m = 1, \ldots, n-1$.

a) Vis at $\varphi_n^1, \ldots, \varphi_n^{n-1}$ er en basis for $\mathcal{G}_n$.

b) Vi utstyrer $\mathcal{G}_n$ med indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt.$$

Finn en ortonormal basis $\{q_1, q_2, q_3\}$ for $\mathcal{G}_4$.

c) Sett $f(t) = 1$ og finn en funksjon $p \in \mathcal{G}_4$ slik at $\|f - p\|$ er minst mulig. Her er $\|\cdot\|$ bestemt ved indreproduktet over. Utrykk p i basisen $\{\varphi_4^1, \varphi_4^2, \varphi_4^3\}$.

d) Vi definerer lineærtransformasjonen $L : \mathcal{G}_4 \mapsto \mathcal{G}_4$ ved

$$L(p)(t) = -\sum_{m=1}^{3} \langle p', \varphi_4^m \rangle \varphi_4^m(t).$$

Finn matrisen til L i basisen $\{\varphi_4^1, \varphi_4^2, \varphi_4^3\}$.

Oppgave 3.

Vis at den kvadratiske formen

$$q(x, y) = 5x^2 + 7y^2 - 2\sqrt{3}xy$$

er positivt definitt.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 4.

I hele denne oppgaven lar vi C og c være to positive tall slik at $0 < c < C$. Vi skal studere stabilitet av likevektspunkter for Eulers metode.

a) Eulers metode for differensialligningen $x' = -cx$ er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k - hcx_k,$$

der x_0 er startverdien. Vis at dersom $ch < 1$ så vil

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

b) La $f(x)$ være en kontinuerlig deriverbar funksjon som tilfredstiller

$$f(0) = 0, \qquad -C < f'(x) < -c < 0, \quad \text{for } x \in [-1, 1].$$

Eulers metode for differensialligningen $x' = f(x)$ er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n).$$

Vis at dersom $|x_0| \leq 1$ og $Ch < 1$ så vil

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

c) La nå A være en $n \times n$ matrise med n forskjellige reelle egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, slik at

$$-C < \lambda_j < -c, \quad \text{for } j = 1, \dots, n.$$

Eulers metode for differensialligningen $X' = AX$ er gitt ved

$$X_{k+1} = X_k + hAX_k.$$

Vis at dersom $Ch < 1$ så gjelder

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0.$$

d) Dette punktet vil drøfte Eulers metode dersom vi har komplekse egenverdier. Finn den generelle løsningen $X(t)$ på systemet av differensialligninger

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X.$$

La $\{X_k\}$ betegne følgen generert ved Eulers metode for dette systemet. Hva må vi kreve av h for at

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{k\to\infty} X_k,$$

der $X(t)$ betegner en løsning med initialverdi X_0, som også er initialverdien i Eulers metode.

SLUTT