UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120B — Differensiallikninger og videregående lineær algebra med beregninger.
Eksamensdag:	Mandag 15. desember 2003.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelliste.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 \\ -1 & 6 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ har egenverdier 1 og 2.

a) Finn den algebraiske multiplisiteten til egenverdiene.

b) Finn basiser for egenrommene E_1 og E_2. Er A diagonaliserbar?

c) Finn en invertibel matrise S slik at $J = S^{-1}AS$ er en matrise på reell Jordan normalform.

d) Finn en løsning av differensialligningen $\dot{X} = AX$ slik at $X(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Oppgave 2.

Vi skal studere oppførselen til $x(t)$ gitt ved differensiallikninga

$$\ddot{x} + (1-\mu)\dot{x} + [\mu(x^2 + \dot{x}^2) - 2]x = 0 \tag{1}$$

hvor μ er en parameter.

(Fortsettes side 2.)

a) For $\mu = 0$, finn den generelle løsninga for $x(t)$, og bestem den spesielle løsninga som har startkrav $x(0) = 1$ og $\dot{x}(0) = 0$.

b) Vis at likninga (1) kan skrives som følgende system av første ordens differensiallikninger

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= [2 - \mu(x^2 + y^2)]x - (1 - \mu)y \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Finn alle likevektsløsningene til dette systemet.

c) Lineariser systemet (2) rundt hver likevektsløsning. Finn ut om likevektene er stabile eller ustabile for forskjellige verdier av μ.

d) Tegn faseportrett for parameterverdi $\mu = 0$, og merk spesielt av trajektorien til den spesielle løsninga i a).
Skisser faseportrett for parameterverdiene $\mu = 0.5$ og $\mu = 1.5$.
Skisser et bifurkasjonsdiagram.

e) For $\mu = 1$ kan vi finne ei spesiell eksakt løsning av det ikkelineære systemet på følgende måte: Introduser amplitude og vinkel (polare) koordinater

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

og utled et system av differensiallikninger for r og θ. Vis at det finnes ei periodisk løsning $r =$ konstant.
Regn ut perioden til denne løsninga.

Oppgave 3.

I denne oppgaven bruker vi indreproduktet i $\mathcal{P}_2$ gitt ved

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p\left(\tfrac{1}{2}\right)q\left(\tfrac{1}{2}\right) + p(1)q(1)$$

$\mathcal{B}$ er standard basis for $\mathcal{P}_2$, dvs. $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

a) Finn en ortogonal basis $\mathcal{C} = \{p_0, p_1, p_2\}$ for $\mathcal{P}_2$ der p_i er et polynom av grad i. (Merk at det ikke kreves at $\mathcal{C}$ er ortonormal.)

b) Finn overgangsmatrisen P fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

c) La $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineæravbildningen gitt ved $L(p(t)) = tp'(t)$. Finn matrisen Q til L med hensyn på basisen $\mathcal{C}$.

SLUTT