UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 120B — Differentialligninger og videregående lineær algebra med beregninger
Eksamensdag:	Onsdag 19. mai 2004.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelliste.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og deres algebraiske multiplisitet.

b) Finn basiser for egenrommene. Er A diagonaliserbar ?

c) Forklar hvorfor transformasjonsmatrisen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bringer matrisen A på reell Jordan normalform.

d) Tegn en skisse av og beskriv med ord hvordan trajektoriene til differensiallikninga

$$\dot{X} = AX$$

oppfører seg.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

a) Gitt differensiallikninga

$$\dddot{x} - \ddot{x} + 4\dot{x} - 4x = 0$$

Vis at $x = e^t$ er ei løsning.
Finn den generelle løsninga.
Finn den spesielle løsninga som tilfredsstiller startkravet

$$x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, \ddot{x}(0) = 1$$

b) Gitt differesiallikninga

$$t^2\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2x = 1$$

Vis at $x = t$ er ei løsning av den homogene likninga. Finn den generelle løsninga av den inhomogene likninga.

Oppgave 3.

Gitt systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2xy + \mu \\ \dot{y} &= 2xy - y \end{aligned} \qquad (1)$$

hvor μ er en reell parameter.

a) Finn alle likevektsløsningene.

b) Lineariser systemet rundt likevektsløsningene for $\mu \neq 0$.
Klassifiser hva slags type likevektsløsninger det dreier seg om.
Tegn faseportrett for $\mu = 1$.
Tegn bifurkasjonsdiagram.

c) Vi skal nå studere det ikkelineære systemet (1) for $\mu = 0$. Vis at det finnes ei løsning $(x(t), y(t))$ slik at $y = F(x)$.
Tegn faseportrett for det ikkelineære systemet (1) for $\mu = 0$.
Diskuter om lineariseringen i punkt b) egner seg til å karakterisere den ikkelineære oppførselen for $\mu = 0$.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 4.

La vektorrommet T være spent ut av basisen

$$\mathcal{B} = \{e^t, \cos t, \sin t\}$$

og være utstyrt med indreproduktet

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

La lineæravbildningen $L : T \to T$ være gitt ved

$$L(f(t)) = f''(t) + f(t)$$

a) Finn matrisen til L med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

b) Løsningene til differensiallikninga $f'' + f = 0$ spenner ut et rom av spesiell betydning for lineæravbildningen L; hva kalles dette rommet ? Finn en basis for dette rommet.
Finn ei anna differensiallikning som har løsninger som spenner ut hele rommet T.

c) Finn en ortogonal basis $\mathcal{C}$ for T.

SLUTT