UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120B — Differensiallikninger og videregående lineær algebra med beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 27. mai 2005.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelliste.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) La A være matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Finn en ortonormal basis av egenvektorer for A. Finn en matrise B slik at $B^2 = A$.

b) Vis at matrisen $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ er diagonaliserbar hvis og bare hvis a, b og c er forskjellige. Er den ortogonalt diagonaliserbar for noen verdier av a, b og c?

Oppgave 2.

a) Gitt differensiallikninga

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = t.$$

Finn den generelle homogene løsningen. Finn en hvilken som helst spesiell løsning.

(Fortsettes side 2.)

b) Gitt differensiallikninga

$$t\dot{x} + 2x = \cos t.$$

Finn den generelle løsningen. Finn den spesielle løsningen som oppfyller $x(1) = 2$.

Oppgave 3.

Gitt systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^3 + xy^2 + \mu x - \gamma y \\ \dot{y} &= x^2 y + y^3 + \mu y + \gamma x \end{aligned}$$

hvor μ og γ er to reelle parametere.

a) Vis at $(x = 0, y = 0)$ er en likevekstløsning. Finn det lineariserte systemet rundt denne likeveksløsningen.

Klassifiser hva slags type likevektsløsning origo er, for forskjellige verdier av μ og γ. For hvilke verdier av parameterene μ og γ vil den lineariserte løsningen ikke egne seg til å beskrive den ikkelineære løsningen nær origo?

b) Foreta koordinat-transformasjonen fra (x, y) til (r, θ) gitt ved

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

hvor $r \geq 0$. Undersøk om det finnes periodiske løsninger, og finn i så fall perioden. Tegn bifurkasjonsdiagram. Skisser faseportrett for $\gamma = 1$ og henholdsvis $\mu > 0$ og $\mu < 0$.

c) Finn den generelle løsningen for $\mu = 0$ analytisk. Skisser faseportrett for $\mu = 0$ og $\gamma = 1$.

Oppgave 4.

La V være vektorrommet av alle funksjoner på formen
$f(x) = a\sin x + b\cos x$, der a og b er reelle tall.

a) La $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)g\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Vis at dette definerer et indreprodukt på V og finn en ortonormal basis for V med hensyn på dette indreproduktet. Finn projeksjonen av $\cos x$ på underrommet utspent av $\sin x$.

(Fortsettes side 3.)

b) La nå t være et tall og la

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(t)g(t).$$

For hvilke t er dette et indreprodukt på V?

c) Vis at formelen $(Pf)(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ definerer en lineær avbildning $P : V \to V$. Hva er matrisen til P relativt til basisen $\{\sin x, \cos x\}$?

SLUTT