

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

- Eksamen i: MAT 120B — Differensiallikninger og videregående lineær algebra med beregninger.
- Eksamensdag: Tirsdag 29. november 2005.
- Tid for eksamen: 09.00 – 15.00.
- Oppgavesettet er på 2 sider.
- Vedlegg: Formelliste.
- Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

### Oppgave 1.

La  $V$  være vektorrommet utspent av funksjonene  $\mathcal{B} = \{\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x\}$ , her antar vi at  $x$  ligger i intervallet  $[-\pi, \pi]$ . La  $D : V \rightarrow V$  være avbildningen gitt ved  $D(f(x)) = f'(x)$ .

- Vis at  $\mathcal{B}$  er en basis for  $V$ .
- Finn matrisen  $M$  til  $D$  i basisen  $\mathcal{B}$ .
- Begrunn at  $M$  er inverterbar, og finn  $M^{-1}$ .
- På  $V$  har vi indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx, \quad f, g \in V.$$

Finn en ortogonal basis  $\mathcal{C}$  for  $V$ .

- Finn en funksjon  $f \in V$ , slik at

$$\int_{\pi}^{\pi} (f(x) - x)^2 dx$$

er minst mulig.

(Fortsettes side 2.)

## Oppgave 2.

La  $A$  være en  $n \times n$  matrise som er slik at

$$A^2 + A + I_n = 0.$$

- Vis at  $A$  er inverterbar.
- Vis at eksponensialmatrisen  $e^{tA}$  kan skrives som

$$e^{tA} = I_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{3k}}{(3k)!} \left( 1 - \frac{t^2}{(3k+1)(3k+2)} \right) + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{3k+1}}{(3k+1)!} \left( 1 - \frac{t}{3k+2} \right).$$

## Oppgave 3.

I et område konkurrerer rever og ulver om maten. Anta at vi har  $x$  ulver og  $y$  rever. (Notasjonen er slik at hver enhet i  $x$  og  $y$  representerer 100 individer.) De har et felles matforråd som hovedsakelig består av smågnagere. En modell som beskriver dynamikken til disse konkurrerende rovdyrene er systemet

$$x' = x - x^2 - xy \tag{1}$$

$$y' = \frac{3}{4}y - y^2 - \frac{1}{2}xy. \tag{2}$$

- Skisser et faseportrett som inkluderer de konstante løsningene. Kan begge disse to artene overleve i det lange løp?
- På grunn av fotturister ønsker man at det ikke skal være mer enn 10 ulver i dette området, samtidig som man ønsker at det skal være en stabil ulvebestand i området. Dette vil man oppnå ved å skyte en andel,  $p$ , av ulvene hvert år. Modifiser modellen til å inkludere denne jakten, og finn hvilken  $p$  som gir en stabil ulvebestand på 10 dyr.
- Anta nå at dynamikken til de to artene er beskrevet ved modellen

$$x' = 4x - x^2 - xy$$

$$y' = 2y - ay^2 - bxy,$$

der  $a$  og  $b$  er positive konstanter. For hvilke verdier av  $a$  og  $b$  kan de to artene overleve sammen?

SLUTT