Eksamen 2004, oppgave 1

June 5, 2006

1 1a

Kostnadsminimeringsproblemet er

$$\min_{\text{s.t. } y=f(x_1,x_2)} [w_1 x_1 + w_2 x_2]$$

Vi har løst dette ved å sette inn for en av variablene. VI har regnet på spesifikke funksjonsformer, slik at regninger har blitt litt enklere. Men generelt gjør vi det ved å definere $\hat{x}_2(y, x_1)$ implistt ved

$$y = f(x_1, \hat{x}_2(y, x_1))$$

altså er $\tilde{x}_2(y, x_1)$ den mengden faktor 2 som trengs for å produsere y gitt at vi bruker x_1 enheter av faktor 1.

Problemet blir da

$$\min w_1 x_1 + w_2 \hat{x}_2(y, x_1)$$

med 1. ordens betingelse

$$w_1 + w_2 \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_1}$$

og 2. ordensbetingelsen er

$$\frac{\partial^2 \hat{x}_2}{\partial x_1^2} \leq 0$$

Ved derivasjon fra definisjonen av $\hat{x}_2$ ser vi at

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_1} = 0$$

som gir

$$\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$$

Setter vi det tilbake i 1. ordens betingelsen får vi

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$$

2 c)

Nå får vi oppgitt at

$$f(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1 x_2}$$

og vi ser at

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{x_2}{\sqrt{x_1 x_2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1 x_2}}\end{aligned}$$

slik at 1. ordens betingelsen blir

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Eller

$$x_2 = \frac{w_1}{w_2} x_1$$

Setter vi tilbake i produktfunksjonen ser vi at

$$y = 2\sqrt{x_1 x_2} = 2x_1 \sqrt{\frac{w_1}{w_2}}$$

eller

$$x_1 = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}$$

og tilsvarende blir

$$x_2 = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}$$

Med kostnad

$$c(y, w_1, w_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = y\sqrt{w_1 w_2}$$

3 d)

Denne påstanden vises enklest ved å motbevise to alternativer. Jeg skal her nøye meg med å vise at det ikke er mulig at

$$c(y, w_1, w_2) > yc(1, w_1, w_2)$$

La $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ være den billigste måten å produsere en enhet, dvs

$$c(1, w_1, w_2) = w_1 \tilde{x}_1 + w_2 \tilde{x}_2$$

og

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 1$$

Nå blir

$$f(y\tilde{x}_1, y\tilde{x}_2) = yf(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = y$$

og vi kan altså produsere y enheter til en kostnad

$$w_1 y\tilde{x}_1 + w_2 y\tilde{x}_2 = yc(1, w_1, w_2)$$

Men det strider mot påstanden om at

$$c(y, w_1, w_2) > yc(1, w_1, w_2)$$

siden $c(y, w_1, w_2)$ skal være den billigste måten å produsere y enheter.

For å vise at den motsatte ulikheten

$$c(y, w_1, w_2) < yc(1, w_1, w_2)$$

er tilsvarende umulig starter vi med den billigste måten å produsere y enheter. Vi skalerer så bruken av innsatsfaktore med $\frac{1}{y}$ og ser av vi kan produsere en enhet med en kostnad

$$\frac{1}{y}c(y, w_1, w_2)$$

som igjen strider med påstanden i ulikheten.