Oppgave 1a. $|e^{f(z)}| = |e^{\mathrm{Re} f(z)}|$, så $e^{f(z)}$ er en hel, begrenset funksjon, og derfor konstant, p.g.a. Liouville's sats. $e^{f(z)} \equiv c$ gir $f(z) \equiv \log c$, for et ~~valg~~ valg av logaritmen ($f(z) \in \mathrm{Log}\, c$). ($f(z)$ kontinuerlig $\Rightarrow$ vi må få samme gren av log for hver $z \in \mathbb{C}$).
Alternativt: $(e^{f(z)})' = 0 = f'(z)e^{f(z)} = f'(z)\cdot c$, så $f' \equiv 0$.

1b Resultatet er opplagt riktig når $g \equiv 0$. Hvis ikke har g høyst isolerte 0-punkter $c_1, c_2, \ldots$, så $h(z) = f(z)/g(z)$ er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{c_1, c_2, \ldots\}$, med $|h(z)| \le 1$. Siden h er begrenset, må de isolerte singularitetene c_j være hevbare, siden de åpenbart hverken kan være poler eller vesentlige (= essensielle) singulariteter. Altså utvides h til en hel, begrenset funksjon, som $\equiv$ en konstant c ved Liouville's teorem med $|c| \le 1$. D.v.s. $f(z) = c \cdot g(z)$.

Oppgave 2a. $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$; $z \notin \pi\mathbb{Z}$, så

$$\cot 2z = \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{2\cos z \sin z} = \frac{1}{2}(\cot z - \tan z).$$

Men $\cos z = \sin(z + \pi/2)$ og $-\sin z = \sin(z + \pi) = \cos(z + \frac{\pi}{2})$ så $-\tan z = \cot(z + \pi/2)$, og (*) gjelder.

2b) Bevis ved induksjon på n. $n = 1$ er $f(z) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{z}{2}) + f(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{2})\right)$, som er (*) anvendt på $z/2$.
Anta at formelen gjelder for $n \ge 1$: $f(\frac{z}{2^n} + \frac{k\pi}{2^n}) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{z}{2^{n+1}} + \frac{k\pi}{2^{n+1}}) + f(\frac{z}{2^{n+1}} + \frac{k\pi}{2^{n+1}} + \frac{\pi}{2})\right)$ p.g.a. (*), og $\frac{\pi}{2} = \frac{2^n\pi}{2^{n+1}}$, så $f(z) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-(n+1)}\left(f(z/2^{n+1} + \frac{k\pi}{2^{n+1}}) + f(\frac{z}{2^{n+1}} + \frac{(k+2^n)\pi}{2^{n+1}})\right)$

Når $0 \le k \le 2^n - 1$, gjennomløper $k + 2^n$ tallene 2^n til $2^{n+1} - 1$, så formelen stemmer for $n+1$.

La f være en hel funksjon. For hver $z \in \mathbb{C}$ er $|z/2^n| \leq 1$ for n stor nok. Da er $\left|\frac{z}{2^n} + \frac{k\pi}{2^n}\right| < \pi + 1$ for $0 \leq k < 2^n$.
Når $M = \max\{|f(z)|, |z| \leq \pi+1\}$, blir
$$|f(z)| \leq 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left|f\left(\frac{z}{2^n} + \frac{k\pi}{2^n}\right)\right| \leq 2^{-n}(2^n \cdot M) = M.$$
Altså er f begrenset, og konstant p.g.a. Liouville's teorem.

c) Sett $g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n\pi} + \frac{1}{z-n\pi}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}$
for $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Dersom $|z| \leq R$, er
$$\left|\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}\right| \leq \frac{2R}{(n\pi)^2 - R^2} \leq \frac{3R}{(n\pi)^2} \text{ for } n > 2R/\pi.$$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3R}{\pi^2 n^2}$ konvergerer, så vi har en majorantrekke for den gitte rekka på kompakter i $\overline{N}(0,R) \setminus \pi\mathbb{Z}$, og gitt rekke konvergerer altså uniformt der. Da vet vi også at summen blir en holomorf funksjon på $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
$$g(2z) = \frac{1}{2z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2z+n\pi} + \frac{1}{2z-n\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z+k\pi} + \frac{1}{z-k\pi}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z+\frac{\pi}{2}+k\pi} + \frac{1}{z-\frac{\pi}{2}-k\pi}\right)\right).$$
(Vi summerer over $n = 2k$ og $n = 2k-1$).

Den første summen er åpenbart $g(z)$; men den andre kan skrives
$$\frac{1}{z+\pi/2} + \left(\frac{1}{(z+\pi/2)-\pi} + \frac{1}{z+\pi/2+\pi}\right) + \left(\frac{1}{z+\frac{\pi}{2}-2\pi} + \frac{1}{z+\frac{\pi}{2}+2\pi}\right) + \cdots$$
$= g(z+\pi/2)$. (Vi skriver $\frac{1}{z-k\pi-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{(z+\frac{\pi}{2})-(k+1)\pi}$, $k = 0,1,\ldots$)
Altså oppfyller $g(z)$ $(*)$ i $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
Nå har både $\cot z$ og $g(z)$ enkle poler med residy $= 1$ i $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Så $f(z) = \cot z - g(z)$ får hevbare singulariteter i disse punktene, og utvides til en hel funksjon. Den er altså konstant $= c$ ifølge b). Men $f(z)$ er en odde funksjon siden både $\cot z$ og $g(z)$ er det, så $c = f(z) = -f(-z) = -c$, så $f(z) \equiv 0$ og $\cot(z) = g(z)$ i $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
Alternativt: $\cot(z) = \frac{1}{z} + O(z)$ når $z \to 0$.

og $g(z) = \frac{1}{z} + 2z(\sum \cdots)$, så $f(z) \to 0$ når $z \to 0$,

og derfor $f(z) \equiv 0$.

Oppgave 3: $z^2 \sin z$ har et 3. ordens 0-punkt i 0 og $\cos z$ har enkle nullpunkt i $\pm\frac{\pi}{2}$, så $f(z) = \frac{1}{z^2 \cos z \sin z}$ har 3. ordens pol i 0 og 1. ordens poler i $\pm\frac{\pi}{2}$ i $|z| < 2$.

residuer: i 0; $\cos z \sin z = \left(1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4)\right) z \left(1 - \frac{z^2}{6} + O(z^4)\right)$

$= z\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) z^2 + O(z^4)\right)$ når $z \to 0$, så

$f(z) = z^{-3}\left(1 - \left(\frac{2}{3} z^2 + O(z^4)\right)\right) = z^{-3}\left(1 + \frac{2}{3} z^2 + O(z^4)\right)$

$= z^{-3} + \frac{2}{3} z^{-1} + O(z)$ når $z \to 0$.

(Vi bruker for $\alpha = \frac{2}{3} z^2 + O(z^4)$ at $\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2$

$= 1 + \alpha + O(z^4)$ når $z \to 0$.)

Altså er $\text{res}(f(z), 0) = \frac{2}{3}$.

I de enkle polene $\pm\frac{\pi}{2}$ bruker vi at $\text{res}(f, \pm\frac{\pi}{2}) = \frac{(z^2 \sin z)^{-1}}{(\cos z)'}\Big|_{z = \pm\frac{\pi}{2}}$

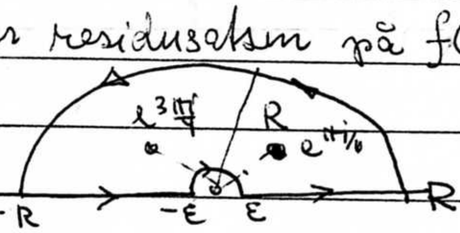
$= -\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2 (\pm 1)^2} = -\frac{4}{\pi^2}$.

Residy-satsen gir $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\text{res}(f,0) + \text{res}(f, -\frac{\pi}{2}) + \text{res} f(\frac{\pi}{2})\right)$

$= 2\pi i\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{\pi^2}\right) = \underline{\underline{4i\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\right)}}$.

Oppgave 4: Vi bruker residusatsen på $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(1+z^4)}$

integrert over kontouren γ:



p.g.a. enkel pol i 0.

For $0 < \varepsilon < 1 < R$ har $f(z)$ enkle poler $e^{\pi i/4}$ og $e^{3\pi i/4}$ i $I(\gamma)$. residuer: Observer at $e^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ og $e^{3\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

$$\operatorname{res}(f, e^{\pi i/4}) = \frac{e^{iz}}{(z+z^5)'}\Big|_{z=e^{\pi i/4}} = \frac{e^{-1/\sqrt2}\cdot e^{i/\sqrt2}}{1+5(e^{\frac{\pi i}{4}})^4}$$

$= -\frac14 e^{-1/\sqrt2}\cdot e^{i/\sqrt2}$, og analogt $\operatorname{res}(f, e^{\frac{3\pi i}{4}}) = -\frac14 e^{-1/\sqrt2}\cdot e^{-i/\sqrt2}$,

og $\operatorname{res}(f,0) = 1$. Dermed blir

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)dx - \int_{C_\varepsilon} f(z)dz + \int_\varepsilon^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\left[-\frac{e^{-1/\sqrt2}}{4}\left(e^{i/\sqrt2}+e^{-i/\sqrt2}\right)\right].$$

Her er C_ε en halvsirkel om 0 fra ε til $-\varepsilon$ med positiv omløpsretning; og C_R en halvsirkel om 0 med radius R i øvre halvplan.

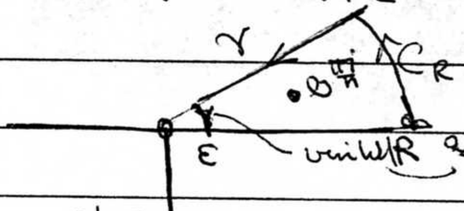
Vi vet at $\int_{C_\varepsilon} f(z)dz \to \pi i$ når $\varepsilon \to 0$; mens $\int_{C_R} f(z)dz \to 0$ når $R \to \infty$.

Vi kan la $R \to \infty$ og få $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_\varepsilon^\infty f(x)dt =$ ~~[illegible]~~

$= -\frac{\pi}{i} e^{-\sqrt2/2}\cos(\sqrt2/2) + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz$. Når vi tar ~~[illegible]~~ Im på begge sider får vi ~~f~~ $\operatorname{Im} f(x) = \frac{\sin x}{x(1+x^4)}$ som har hevbar singularitet i 0, og ~~[illegible]~~ kan la $\varepsilon \to 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x(1+x^4)} = \pi\left(1 - e^{-\sqrt2/2}\cos \sqrt2/2\right)).$$

Oppgave 5: Antar først $n > 1$. For en passende gren av z^a skal vi integrere $\underbrace{\frac{z^a}{1+z^n}}_{f(z)}$ over en kontur



som omslutter en pol.

Vi definerer $z^a = e^{a\log z}$, der vi velger en gren av logaritmen som er reell på $(0,\infty)$ med et kutt utenfor γ, f.eks. langs $i(-\infty,0]$, slik at $\log z = \log|z| + i\arg z$, der $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$.

Vi må gå langs en liten sirkelbue C_ε for å unngå 0 der log ikke er definert. Vi kan da bruke residy-satsen, og få

$$\int_\varepsilon^R \frac{x^a dx}{1+x^4} + \int_{C_R} f(z)dz - \int_\varepsilon^R \frac{t^a e^{2\pi a i}(e^{\frac{2\pi i}{n}}dt)}{1+t^n} + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(f, e^{\frac{\pi i}{n}})$$

(− tegn i 3. integral fordi vi går i motsatt retning. $(e^{\frac{2\pi i}{n}} t)^n = t^n$!)

$$\operatorname{res}(f, e^{\pi i/n}) = \frac{e^{a\pi i/n}}{n(e^{\pi i/n})^{n-1}} = -\frac{e^{\frac{\pi(a+1)i}{n}}}{n}.$$

Vi får $\left(1 - e^{\frac{2\pi(a+1)i}{n}}\right) \int_\varepsilon^R \frac{x^a\,dx}{1+x^n} + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = -\frac{2\pi i\, e^{\frac{\pi(a+1)i}{n}}}{n}$

For $z = re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, blir $z^a = e^{a(\log r + it)}$ $= e^{(a_1 \log r - a_2 t) + i(a_1 t + a_2 \log r)}$ når $a = a_1 + i a_2$, så

$|z^a| = r^{a_1} e^{-a_2 t} \le C r^{a_1}$, der $C = \max(1, e^{-a_2\pi})$

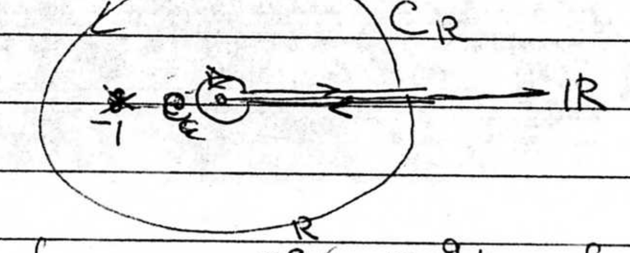
Estimeringslemmaet gir: $\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)dz\right| \le \frac{C\varepsilon^{a_1}}{1-\varepsilon^n} \cdot \frac{2\pi}{n}\varepsilon \to 0$ når $\varepsilon \to 0$ for $a_1 > -1$

og $\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \frac{CR^{a_1}}{R^n - 1} \cdot \frac{2\pi}{n} R \to 0$ når $a_1 < n-1$.

Vi kan la $\varepsilon \to 0$ og $R \to \infty$, og får $\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{1+x^n} = \frac{2\pi i\, e^{\frac{\pi(a+1)i}{n}} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi(a+1)i}{n}}}{2i}}{n\left(e^{\frac{2\pi(a+1)i}{n}} - 1\right)\frac{e^{-\frac{\pi(a+1)i}{n}}}{2i}}$

$$= \frac{\pi}{n(\sin[(a+1)\pi/n])}$$

For $n=1$ må vi integrere rundt "nøkkelhull konturen" og bruke grein av log med kutt langs $[0,\infty)$; $\log z = \log|z| + i\arg z$, der $0 < \arg z < 2\pi$.



Vi får $\int_\varepsilon^R \frac{(x+i\delta)^a dx}{1+(x+i\delta)} + \int_{C_R} f(z)dz + \int_R^\varepsilon \frac{(x-i\delta)^a dx}{1+(x-i\delta)} + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz =$

$= 2\pi i \operatorname{res}(f(z), -1) = 2\pi i\, e^{\pi a i}$

når $\delta \to 0$ vil $(x-i\delta)^a \to e^{(\log x + 2\pi i)a} = x^a \cdot e^{2\pi a i}$, $(x+i\delta)^a \to x^a$; $\log(x+i\delta) \to \log x$.

$\int_{C_\varepsilon}$ og $\int_{C_R} \to 0$ som før, og $(1 - e^{2\pi a i}) \int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{1+x} = 2\pi i\, e^{a\pi i}$,

fordi $-1 < \operatorname{Re} a < 0$

Som gir $\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(a+1)\pi}$, så formelen stemmer også for $n = 1$.

Oppgave 6: $f(z) \equiv 0$ er en triviell løsning.
Når $f(z) \not\equiv 0$, må den ha en Taylorutvikling

$$f(z) = a_n z^n + O(z^{n+1}), \text{ med } a_n \neq 0.$$

Vi får $f(z^2) = a_n z^{2n} + O(z^{2n+2})$ og

$$f(z)^2 = a_n^2 z^{2n} + O(z^{2n+1}).$$

Altså må $a_n = a_n^2$, og siden $a_n \neq 0$, må $a_n = 1$.
Dersom $f(z) \neq z^n$, må vi ha en Taylorutvikling

$$f(z) = z^n + a_m z^m + O(z^{m+1}),$$

med $m > n$ og $a_m \neq 0$.
Vi får $f(z^2) = z^{2n} + a_m z^{2m} + O(z^{2m+2})$,
men $f(z^2) = (z^n + a_m z^m + O(z^{m+1}))^2$

$$= z^{2n} + 2a_m z^{m+n} + O(z^{m+n+1})$$

De to rekkene skal være like, og $2n < m+n < 2m$,
så $a_m = 0$ likevel. Motsigelse! Altså er $f(z) = z^n$.
Løsningene er derfor 0 og z^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.