UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 2310 — Optimal kontrollteori.
Eksamensdag:	Onsdag 1. juni 2005.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Sydsæter, Strøm, Berck: Economists' Mathematical Manual, (Matematisk formelsamling for økonomer).

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La

$$M = \operatorname*{maks}_{u} \int_0^{\pi/2} \Big(- x^2 + u + xu + \frac{x^3}{u} \Big) dt, \tag{1}$$

der

$$x(0) = 0, \quad x\big(\tfrac{\pi}{2}\big) = 2 \tan \tfrac{5\pi}{12} = 2(2 + \sqrt{3}\,), \tag{2}$$

og

$$\dot{x} = u + \tfrac{x^2}{u}\,, \qquad u(t) \in [1, 2], \;\; t \in \big[0, \tfrac{\pi}{2}\big]. \tag{3}$$

a) Vis at vi har

$$M = K + \operatorname*{maks}_{u} \int_0^{\pi/2} (-x^2 + u) dt, \tag{4}$$

der K er konstant, og med betingelsene i (2) og (3).

(Fortsettes side 2.)

b) La H være Hamiltonfunksjonen til maksimeringsproblemet i (4). (Du kan anta at problemet er ikkedegenerert, så $p_0 = 1$.) Vis at $H(t, x, u, p(t))$ er konkav i (x, u) hvis og bare hvis $p(t) \leq 0$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (Her står p for den adjungerte funksjonen til problemet.)

Anta at (x^*, u^*) er et optimalt par for maksimeringsproblemet i (4).

c) Vis at

$$u^*(t) = \left[\frac{p(t)}{p(t)+1}\right]^{1/2} x^*(t) \quad \text{hvis } p(t) < -1,$$

og at

$$u^*(t) = 1 \text{ eller } 2 \text{ hvis } -1 \leq p(t) \leq 0,\ t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

La I_1 og I_2 være to intervall inneholdt i $[0, \frac{\pi}{2}]$, og anta at $u^*(t) = 1$ for $t \in I_1$ og $u^*(t) = 2$ for $t \in I_2$.

d) Vis at

$$x^*(t) = \tan(t + C_1), \qquad t \in I_1$$

og

$$x^*(t) = 2\tan(t + C_2), \qquad t \in I_2$$

der C_1 og C_2 er to konstanter.

e) Vis at

$$p(t) = 1 - \frac{1}{D_1 \cos^2(t + C_1)}, \qquad t \in I_1,$$

og

$$p(t) = 2 - \frac{1}{D_2 \cos^2(t + C_2)}, \qquad t \in I_2,$$

der D_1 og D_2 er to positive konstanter ($D_1 > 0$ og $D_2 > 0$).

Forsøk nå å sette $I_1 = [0, t_0)$ og $I_2 = (t_0, \frac{\pi}{2}]$ for en t_0 i $(0, \frac{\pi}{2})$, i f) og g) nedenfor.

f) Bestem konstantene C_1 og C_2 i d). Vis at det fins to mulige verdier for t_0, og bestem $\tan t_0$.
(**Vink:** $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$, $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$, $32\sqrt{3} = 55.4256\ldots$)

I resten av oppgaven lar vi t_0 stå for den *minste* av disse to verdiene. Nedenfor kan du få bruk for følgende estimat:

$$t_0 \approx 0.575.$$

(Fortsettes side 3.)

g) Vis at konstantene D_1 og D_2 i e) må oppfylle

$$D_2 = \frac{D_1 \cos^2 t_0}{(1 + D_1 \cos^2 t_0)\cos^2(t_0 - \frac{\pi}{12})}$$

Anta nå at $D_1 = \frac{1}{2\cos^2 t_0}$. Påvis at det gir $p(t_0) = -1$ og $p(t) < -1$, $t \in I_2$. Er (x^*, u^*) likevel en løsning av problemet (med valget $D_1 = \frac{1}{2\cos^2 t_0}$)?

Vink: Undersøk om $u^*(t) = 2$ kan være løsning for $p(t) < -1$ i c).

SLUTT