

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT 2310 — Optimal kontrollteori.

Eksamensdag: Mandag 11. juni 2007.

Tid for eksamen: 09.00 – 12.00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Sydsæter, Strøm, Berck: Economists' Mathematical Manual, (Matematisk formelsamling for økonomer).

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Følgende problem i dynamisk programmering skal studeres.

$$\text{maks}_{u_0, u_1, \dots, u_T} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \frac{2\sqrt{u_t}}{x_t} + 2x_T^{-1} \right],$$

der

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (1 - u_t)^{-1} x_t \quad (t = 0, 1, \dots, T - 1), \\ 0 &< u_t < 1 \quad (t = 0, 1, \dots, T). \end{aligned}$$

Her er x_0 et gitt positivt tall.

(Fortsettes side 2.)

- a) Anvend Fundamentallikningene til å bestemme $J_T(x)$, $J_{T-1}(x)$ og tilhørende optimale kontrollfunksjoner $u_T^*(x)$, $u_{T-1}^*(x)$.
- b) Bevis at

$$J_{T-t}(x) = \frac{1}{x}k_t, \quad u_{T-t}^*(x) = \frac{1}{k_{t-1}^2} \quad (t = 1, 2, \dots, T),$$

der k_t oppfyller den ikke-lineære differenslikningen

$$k_{t+1} = k_t + \frac{1}{k_t} \quad (t = 0, 1, \dots, T-1), \quad k_0 = 2.$$

Hva er løsningen på maksimeringsproblemet for $T = 3$ og $x_0 = 1$?

Oppgave 2.

Vi betrakter kontrollproblemet

$$\max_u \int_0^1 (\ln u + x) dt, \quad \dot{x} = x - u, \quad x(0) = 0, \quad x(1) \text{ er fri,}$$

og der $u(t) \in (0, 1]$ for alle $t \in [0, 1]$.

- a) Skriv opp Hamiltonfunksjonen H for problemet, beregn $\frac{\partial H}{\partial x}$ og finn den adjungerte funksjonen p .

Vi antar nå at (x^*, u^*) er et optimalt par for problemet.

- b) Bestem den éntydige løsningen t_0 av likningen $p(t) = 1$. Forklar at

$$u^*(t) = \frac{1}{p(t)}, \quad \text{for } t \in [0, t_0).$$

- c) Finn $x^*(t)$ for $t \in [0, t_0)$.
- d) Vis at $\frac{\partial H}{\partial u} > 0$ i punkter $(t, x(t), u(t), p(t))$ der $t \in (t_0, 1]$. Hva er $u^*(x)$ for $t \in (t_0, 1]$?
- e) Bestem så $x^*(t)$ på intervallet $(t_0, 1]$. Forklar at (x^*, u^*) virkelig løser kontrollproblemet.

SLUTT