UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT 2310 — Optimal kontrollteori
Eksamensdag:	Torsdag 4. juni 2009.
Tid for eksamen:	9.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Sydsæter, Strøm, Berck: Economists' Mathematical Manual, eller Matematisk formelsamling for økonomer.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Løs differensiallikningene

(a)

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$$

og

(b)

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = \cos t$$

En funksjon F av tre variable er gitt ved

$$(*) \quad F(t, x, \dot{x}) = (3x^2 + 2x\cos t + \dot{x}^2)e^{-2t}, \quad (t, x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3$$

(c) Avgjør om $F(t, x, \dot{x})$ er konveks i $(x, \dot{x})$ for fast t ($t \in \mathbb{R}$).

(d) Finn en optimal funksjon x for minimeringsproblemet

$$\min_x \int_0^\pi F(t, x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t, \quad x(0) = -\frac{1}{5},\ x(\pi) \text{ er fri},$$

der F er som i $(*)$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Betrakt kontrollproblemet

$$
(1) \quad \begin{cases} \text{maks} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \Big[u(t) - \frac{u(t)^2}{\cos t}\Big]\, \mathrm{d}t, \qquad \dot{x} = -u, \\ u(t) \geq 0 \ (t \in [0, \dfrac{\pi}{6}]),\ x(0) = 0,\ x(\dfrac{\pi}{6}) = -\dfrac{1}{8} \end{cases}
$$

Du kan ta for gitt at dette er et standardproblem.

(a) Skriv opp Hamiltonfunksjonen $H(t, x, u, p)$ for kontrollproblemet (1). Anvend Maksimumsprinsippet til å vise at den adjungerte funksjonen p må være en konstant k.

(b) Finn den eneste mulige optimale kontrollfunksjonen u^* for problemet, uttrykt ved k og kjente funksjoner.

(c) Bestem konstanten k og et optimalt par (x^*, u^*). Begrunn at dette paret virkelig er optimalt.

(d) Vi endrer endepunktsbetingelsene i (1) til $x(0) = 0$ og $x(\frac{\pi}{6}) \geq -\frac{1}{8}$. Hva er løsningen av det nye kontrollproblemet?

SLUTT