Obligatorisk oppgave i MAT2310 våren 2007. Innleveringsfrist: 18.4.2008.

Spørsmål 1. Diskrete tilstandsvariable og strategier.

Anta at vi har en maskin som produserer varer. Maskinen kan være i en av mange diskrete tilstander: $x \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Anta at hvis maskinen er i tilstand i så vil den generere en fortjeneste i den neste uka på

$$y(x) = 10\frac{n-x}{n-1}.$$

Vi ser altså at hvis maskinen er i en lavere tilstand så "virker den bedre". Hver uke er det imidlertid en viss sjanse for at maskinens tilstand blir forverret hvis vi ikke gjør noe med den. Vi kan imidlertid reparere maskinen, det koster 5 og vil garantere at maskinen ikke blir verre i neste uke, eller vi kan erstatte den med en ny maskin, det koster 70 og vil garantere at den nye maskinen er i tilstand 1 neste uke. Vi kan også velge å ikke gjøre noe, det er gratis, men sjansen for at maskinen hopper fra tilstand i til tilstand j er da gitt ved

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0 & j < i, \\ 2^{-(n-i)} & j = i, \\ 2^{-(j-i)} & j > i. \end{cases}$$

Vi ønsker å maksimere beløpet vi kan forvente å tjene i løpet at T uker, dvs.

$$J_0(x) = \max_{u_0,\ldots,u_{T-1}} \left\{ \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} y\left(x_t\right) - h(u_t) + y\left(x_T\right) \right) \;\middle|\; x_0 = x \right\}.$$

Her er $\mathbb{E}$ forventningen. Maskinens tilstand utvikler seg etter differensligningen

$$x_{t+1} = w\left(x_t, u_t\right),$$

hvor $w(x, u)$ er bestemt at kontrollen u og tilfeldighetene. Hvis $u = 1$ (kjøp ny maskin), så er $w(x, 1) = 1$, hvis $u = 2$ (reparer maskin), så er $w(x, 2) = x$, og hvis $u = 3$ (gjør ingenting) så er $w(x, 3) = j$ med sannsynlighet $p_{x,j}$. Her er kostnadene gitt ved reparasjon eller kjøp av ny maskin, dvs.,

$$h(1) = 70, \ h(2) = 5, \ h(3) = 0.$$

(**a**) Anta at $n = 3$, finn $J_T(x)$ og $J_{T-1}(x)$ for $x = 1$, 2 og 3.

(**b**) Forklar hvorfor vi har

$$J_{k-1}(i) = \max\left\{ J_k(1) - 60, J_k(i) + 10\frac{n-i}{n-1} - 5, \sum_{j=i}^{n} p_{i,j}\left(y(j) + J_k(j)\right) \right\} \tag{1}$$

og at de optimale reparasjons og erstattningsplanen er gitt ved

$$u^*_{k-1}(i) = \operatorname{argmax}\left\{ J_k(1) - 60, J_k(i) + 10\frac{n-i}{n-1} - 5, \sum_{j=i}^{n} p_{i,j}\left(y(j) + J_k(j)\right) \right\}. \tag{2}$$

samt at $J_T(i) = y(i)$.

(**c**) Bruk f.eks. Matlab til å regne ut (matrisen) $J_k(i)$ for $T = 52$ og $n = 26$, og $k = 1, \ldots, T$, $i = 1, \ldots, 26$. Plott denne matrisen med f.eks. "`pcolor`", eller "`contourf`" i Matlab. Husk å sette på en "`colorbar`" som viser hva fargene betyr.

(**d**) Hva lønner det seg å gjøre dersom maskinen ved $t = 40$ er i tilstand 12? Hvor mye er det rimelig å betale for en maskin i tilstand 20 ved $t = 20$? Svarene skal begrunnes.

Spørsmål 2. Betrakt variasjonsproblemet

$$\min_x \int_0^\pi \left(x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\sin(t) \right) e^{-t}\, dt, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x(\pi) = -\frac{1}{2}.$$

(**a**) Løs Eulerligningen til variasjonsproblemet med de gitte endepunktsbetingelsene.

(**b**) Bestem om løsningen fra (**a**) er optimal. Svaret skal begrunnes.

Spørsmål 3. La T, α og β være positive konstanter, og la $x(t)$ tilfredstille differensialligningen

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - u(t), \quad t \in (0, T), \quad x(0) = x_0 > 0, \quad x(T) = 0. \tag{3}$$

Vi ønsker å maksimere

$$\int_0^T e^{-\beta t} \sqrt{u(t)}\, dt,$$

når x tilfredstiller (3) og $u(t) \in [0, x(t)]$. Finn den optimale kontrollen $\hat{u}(t)$ og den tilhørende optimale banen $\hat{x}(t)$. Plott $\hat{x}(t)$ og $\hat{u}(t)$ for $x_0 = 100$, $\alpha = 0.06$, $\beta = 0.1$ og $T = 20$.