UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3000 — Tall, rom og lineæritet.
Eksamensdag:	Torsdag 12. juni 2008.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

MERK : Ved sensuren teller punktene 1, 3, 4a), 4b), 6a), 6b), 6c) alle 10 poeng hver, mens punktene 2 og 5 teller 15 poeng hver. Maks. poengsum blir dermed 100 poeng.

Oppgave 1

Er $\overline{6}$ en kvadratisk rest i $\mathbb{Z}/(23)$? Er 1035 en kvadratsum ?

Oppgave 2

Definer $f : \mathbb{Z}/(23) \to \mathbb{Z}/(23)$ ved $\quad f(\overline{x}) = \overline{4}\,\overline{x}^3 + \overline{5}, \quad \overline{x} \in \mathbb{Z}/(23).$

Begrunn at f er en bijeksjon av $\mathbb{Z}/(23)$ og finn $f^{-1}(\overline{6})$ (uten å lage en tabell for f).

Oppgave 3

Hva sier Eulers teorem ?
La så $m \in \mathbb{N}$ være odd. Vis at $2^{(m-1)!} \equiv 1 \pmod{m}$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 4

La V og W være vektorrom over $\mathbb{K}$, der $\mathbb{K}$ betegner enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.
La T være en lineær avbildning fra V inn i W og la S være en lineær avbildning fra W inn i V. Anta at $ST = I$, der $I : V \to V$ betegner identitetsavbildningen gitt ved $I(v) = v$ for alle $v \in V$. Sett $Q = TS$.

a) Begrunn at $W = R(T) \oplus N(S)$ og at Q er projeksjonsavbildningen fra W på $R(T)$ langs $N(S)$ (mao $Q(w_1 + w_2) = w_1$ når $w_1 \in R(T)$, $w_2 \in N(S)$).
Hint : Bruk at $w = Q(w) + w - Q(w)$ når $w \in W$.

b) Anta videre at både V og W er endeligdimensjonale.
Begrunn at dim $V \leq$ dim W og at dim $N(S)$ = dim W - dim V.

Oppgave 5

La $n \in \mathbb{N}$. Vi betraker $\mathbb{C}^n$ med sitt standard indreprodukt.

La $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$ være to ortonormale (ordnede) basiser for $\mathbb{C}^n$ og la P være koordinatskiftematrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$. Begrunn at P er unitær. Sjekk at P er unitær når $n = 2$ og $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\}, \mathcal{C} = \{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1+i \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1+i \\ 1-i \end{bmatrix}\}$.

Oppgave 6

La $n \in \mathbb{N}$ og sett $V = M_{n \times n}(\mathbb{K})$, der $\mathbb{K}$ betegner enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.
I punkt a) betrakter vi V som et indreprodukt rom med hensyn på Frobenius indreproduktet.

La $A \in V$ og la $T \in \mathcal{L}(V)$ være gitt ved

$$T(A') = A\,A', \quad A' \in V.$$

a) Vis at $< AA', B > = < A', A^*B >$ for alle $A', B \in V$. Begrunn at T er diagonaliserbar dersom A er selvadjungert.

b) La $\lambda \in \mathbb{K}$. Vis at λ en egenverdi for T hvis og bare hvis λ en egenverdi for A. Beskriv sammenhengen mellom egenrommet E_λ^T til T og egenrommet E_λ^A til A tilhørende en egenverdi λ for T og A.

c) Vis at T er diagonaliserbar hvis og bare hvis A er diagonaliserbar.
Hint : Begrunn først at dersom λ er en egenverdi for T og A, så er $\dim E_\lambda^T = n \dim E_\lambda^A$.

SLUTT