UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3000/4000 — Tall, rom og lineæritet.
Eksamensdag:	Torsdag 10. juni 2010.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er i alt 10 spørsmål. Hvert spørsmål teller 10 poeng.

Oppgave 1

La $f : \mathbb{Z}/(55) \to \mathbb{Z}/(55)$ være definert ved $f(\overline{x}) = \overline{x}^{27}$.

a) Begrunn at f er en bijeksjon av $\mathbb{Z}/(55)$.

b) Ola har laget en hemmelig melding til Kari ved å erstatte bokstaver med tosifrede tall (A= 01, $\cdots$, Å= 29). Han sender så 4 tosifrede tall $s_1, \cdots, s_4$ ved å sende den krypterte sekvensen $f(\overline{s_1}) = \overline{5}$, $f(\overline{s_2}) = \overline{24}$, $f(\overline{s_3}) = \overline{23}$, $f(\overline{s_4}) = \overline{5}$. Hva er den hemmelige beskjeden ? (Svaret er altså ett ord på 4 bokstaver).

Oppgave 2

Avgjør om $\overline{3}$ er en kvadratisk rest i $\mathbb{Z}/(73)$. Er 5490 en kvadratsum ?

Oppgave 3

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Begrunn, uten å regne ut egenvektorene, at A er unitært diagonaliserbar. Finn så en unitær $U \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ som er slik at matrisen U^*AU er diagonal.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4

La V være et komplekst indreproduktrom og $T \in \mathcal{L}(V)$.

a) Vis at $< T(v+w), v+w > -i < T(iv+w), iv+w > +(i-1) < T(v), v > +(i-1) < T(w), w >= 2 < T(v), w >$ for alle $v, w \in V$.

b) Vis at dersom $< T(v), v >= 0$ for alle $v \in V$, så er T nulloperatoren.

c) Vis at dersom T er adjungerbar og $||T(v)|| = ||T^*(v)||$ for alle $v \in V$, så er T normal.

Oppgave 5

La V være et vektorrom av dimensjon n over $\mathbb{K}$, der $\mathbb{K}$ betegner enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

a) Hvis W_1 og W_2 er underrom av V av dimensjon m_1 og m_2, vis at $\dim(W_1 \cap W_2) \geq m_1 + m_2 - n$. (Det anses som kjent at $W_1 \cap W_2$ er et underrom.)

b) Anta at V også har et indreprodukt, at $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$ er en voksende kjede av underrom av V og $T \in \mathcal{L}(V)$ slik at alle V_k er invariante under T og $\dim(V_k) = k$. Vis at det finnes en ortogonal basis $\mathcal{B}$ for V slik at $[T]_{\mathcal{B}}$ er øvre triangulær.

Oppgave 6

La a og n være hele tall, begge ekte større enn 1, slik at $\overline{a}^{n-1} = \overline{1}$ i $\mathbb{Z}/(n)$, men $\overline{a}^m \neq \overline{1}$ for alle hele tall m slik at $0 < m < n-1$. Vis at n er et primtall.

SLUTT