UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT3000/4000 — Tall, rom og lineæritet.
Eksamensdag:	Mandag 6. juni 2011.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er i alt 10 spørsmål. Total score er 100 poeng.

Oppgave 1

a) (10 poeng) Finn et tall a mellom 0 og 1000 slik at $a \equiv 19 \pmod{35}$ og $a \equiv 0 \pmod{37}$.

b) (10 poeng) La $f : \mathbb{Z}/(65) \to \mathbb{Z}/(65)$ være definert ved $f(\overline{x}) = \overline{33}\overline{x}^{29}$. Begrunn at f er en bijeksjon og finn en formel for f^{-1}.

Oppgave 2

La $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1+2i \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

a) (12 poeng) Begrunn, uten å regne ut egenvektorene, at A er unitært diagonaliserbar. Finn så en unitær $U \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ som er slik at matrisen U^*AU er diagonal.

b) (10 poeng) La $V = \mathcal{P}_1(\mathbb{C}) = \{p(z) = az + b \mid a, b \in \mathbb{C}\}$. Vi innfører et indreprodukt $< p, q >= \frac{1}{2}(p(0)\overline{q(0)} + p(1)\overline{q(1)})$ i V. Vis at $\mathcal{B} = \{1, 2z - 1\}$ er en ortonormal basis for V.
La $T \in \mathcal{L}(V)$ være definert ved

$$T(az + b) = (\sqrt{3} - i)a + (1 + \sqrt{3})b + ((1 - \sqrt{3} + 2i)a - (2\sqrt{3})b)z.$$

(Fortsettes på side 2.)

Vis at $[T]_{\mathcal{B}} = A$.

c) (10 poeng) Forklar at T er unitært diagonaliserbar og finn en ortonormal basis av egenvektorer for T. (En vektor er her et polynom.)

d) (8 poeng) Finnes det en unitær operator S slik at $S(z+1) = z-1$?

Oppgave 3

La V være et komplekst n-dimensjonalt vektorrom og la $S \in \mathcal{L}(V)$. Vi definerer $V_k = R(S^k)$ og $W_k = N(S^k)$ for $k = 0, 1, 2, \cdots$ (S^0 er identiteten I pr. definisjon, så $V_0 = V$ og $W_0 = \{\mathbf{0}\}$.)

a) (12 poeng) Vis at det fins en k, $0 \leq k \leq n$ slik at $V_{k+1} = V_k$ og at vi da har $V = V_k \oplus W_k$.

b) (8 poeng) Vis at om $T \in \mathcal{L}(V)$ bare har en egenverdi λ og $S = T - \lambda \mathrm{I}$, så er $V_n = \{\mathbf{0}\}$.

Oppgave 4

La p være et primtall og sett $\mathbb{Z}/(p)^* = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}/(p) \mid \overline{a} \neq \overline{0}\}$. Vi sier at $\overline{a} \in \mathbb{Z}/(p)^*$ er av *orden* m hvis $m \in \mathbb{N}$ er det minste hele tallet slik at $\overline{a}^m = \overline{1}$.

a) (5 poeng) Vis at ordenen $m \leq p-1$ for alle $\overline{a} \in \mathbb{Z}/(p)^*$.

(Det følger at ligningen $\overline{x}^m = \overline{1}$ har m løsninger $\overline{1}, \overline{a}, \cdots, \overline{a}^{m-1}$. Dette skal ikke bevises men kan brukes senere i denne oppgaven.)

b) (10 poeng) Vis at dersom $\overline{a}$ har orden m og $k \mid m$, så vil $\overline{a}^k$ ha orden $\frac{m}{k}$. Videre, hvis $\overline{b}$ har orden n og $(m,n) = 1$, så vil $\overline{a}\overline{b}$ ha orden mn. (Hint: Opphøy ligningen $(\overline{a}\overline{b})^k = \overline{1}$ i n-te potens og konkluder med at $m \mid k$. Tilsvarende må også $n \mid k$.)

c) (5 poeng) Vis at det finnes en $\overline{a} \in \mathbb{Z}/(p)^*$ som har orden $p-1$.

SLUTT