UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 3000 — Tall, rom og lineæritet
Eksamensdag:	Fredag 7. juni 2013
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er i alt 10 deloppgaver. Total score er 100 poeng.

Oppgave 1 [10 poeng]

Sjekk at $\overline{3}$ *er en kvadratisk rest i* $\mathbb{Z}/(23)$ *og finn løsningene av likningen* $\overline{x}^2 = \overline{3}$ *i* $\mathbb{Z}/(23)$ (*uten å lage en tabell for* $\overline{x}^2$).
Du får lov til å bruke at $\overline{3}^8 = \overline{6}$ *i* $\mathbb{Z}/(23)$ *uten å beregne det selv.*

Oppgave 2 [10 poeng]

La $g : \mathbb{Z}/(33) \to \mathbb{Z}/(33)$ *være definert ved*

$$g(\overline{x}) = (\overline{2\,x+3})^9, \quad \overline{x} \in \mathbb{Z}/(33)\,.$$

Begrunn at g *er en bijeksjon og finn en formel for* g^{-1}.

Oppgave 3

La p *være et primtall og la* d *være den største felles divisoren av* $p\,!$ *og* $(p-1)! + 1$.

a) [5 poeng] *Hva sier Wilsons teorem? Bruk dette teoremet til å begrunne at* $p \leq d$.

b) [10 poeng] *Begrunn at* $d = p$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4 [15 poeng]

Betrakt underrommene av $\mathbb{C}^2$ *gitt ved*

$W_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_2 = z_1\}, \quad W_2 = \{(z_1', z_2') \in \mathbb{C}^2 \mid z_2' = i\, z_1'\}\,.$

Begrunn at $\mathbb{C}^2 = W_1 \oplus W_2$.
Beregn deretter standardmatrisen A *til* P, *der* P *betegner projeksjonsavbildningen av* $\mathbb{C}^2$ *på* W_1 *langs* W_2.

Oppgave 5

La $A = \begin{bmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

a) [10 poeng] *Begrunn at* A *er unitært diagonaliserbar og bestem en unitær matrise* U *som diagonaliserer* A.

Betrakt nå lineæravbildningen $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *definert ved*

$$T(p) = p(A)\,, \quad p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C})\,.$$

b) [10 poeng] *Finn en basis for* $R(T)$ *og en basis for* $N(T)$.

Oppgave 6

La $V \neq \{\mathbf{0}\}$ *være et reelt endeligdimensjonalt indreproduktrom med* $\dim V = n$ *og anta at* $S, T \in \mathcal{L}(V)$ *begge er symmetriske.*

a) [10 poeng] *Anta at det fins en basis* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *for* V *som består av vektorer som er egenvektorer for både* S *og* T.
Begrunn at da er $ST = TS$.

Hint: *Sammenlikn* $(ST)(\mathbf{v}_j)$ *og* $(TS)(\mathbf{v}_j)$ *for* $j = 1, \ldots, n$.

b) [10 poeng] *Anta at* $ST = TS$. *La* $\lambda \in \mathbb{R}$ *være en egenverdi for* T *og la* U *betegne det assosierte egenrommet* E_λ^T.
Begrunn at U *er invariant under* S. *Begrunn også at restriksjonen* S_U *av* S *til* U *er en symmetrisk operator på* U *(med hensyn på indreproduktet som* U *arver fra* V*).*

c) [10 poeng] *Anta at* $ST = TS$. *Begrunn at det da fins en ortonormal basis* $\mathcal{B}$ *for* V *som består av vektorer som er egenvektorer for både* S *og* T.

SLUTT