UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3000/4000 — Tall, rom og lineæritet.
Eksamensdag:	Torsdag 7. juni 2012.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

1a (vekt 5 %)

Finn et tall a mellom 0 og 1000 slik at $a \equiv 19 \pmod{37}$ og $a \equiv 0 \pmod{41}$.

1b (vekt 5 %)

La $f : \mathbb{Z}/(65) \to \mathbb{Z}/(65)$ være definert ved $f(\overline{x}) = \overline{33}\,\overline{x}^{25}$. Begrunn at f er en bijeksjon og finn en formel for f^{-1}.

1c (vekt 5 %)

Avgjør om $\overline{3}$ er en kvadratisk rest i $\mathbb{Z}/(67)$. Er 2012 en kvadratsum? (Hint: 503 er et primtall.)

Oppgave 2

I hele denne oppgaven er

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

2a (vekt 10 %)

Hvilke betingelser må a, b, c og d tilfredsstille for at M skal være normal?

2b (vekt 10 %)

Vis at hvis $M \in M_2(\mathbb{R})$ er normal og har reelle egenverdier, så er M symmetrisk. Uttrykk egenverdiene ved hjelp av a, b, c og d.

(Fortsettes på side 2.)

2c (vekt 10 %)

Bruk resultatet fra oppgave 2a til å bestemme hvilke betingelser a, b, c og d må tilfredsstilleeskriv hvis $M \in M_2(\mathbb{R})$ er normal og har komplekse (ikke reelle) egenverdier. Uttrykk egenverdiene ved hjelp av a, b, c og d.

Oppgave 3

La
$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

3a (vekt 5 %)

Anta at $M \in M_2(\mathbb{R})$ er ortogonal og at $\det M = 1$. Vis at M representerer en rotasjon med vinkel θ.

3b (vekt 10 %)

Anta at $M \in M_2(\mathbb{R})$ er ortogonal og at $\det M = 1$. Er M ortogonalt diagonaliserbar? Er M unitært diagonaliserbar? Finn eventuelt en egenvektorbasis som diagonaliserer ortogonalt eller unitært.

3c (vekt 10 %)

I hele denne oppgaven er
$$N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Anta at $M \in M_2(\mathbb{R})$ er ortogonal og at $\det M = -1$. Vis at M representerer en speiling. (Hint: Finn egenvektorene.)

3d (vekt 10 %)

Er M ortogonalt diagonaliserbar? Er M unitært diagonaliserbar? Finn eventuelle egenvektorbasiser som diagonaliserer ortogonalt eller unitært.

Oppgave 4

En matrise $Q \in M_n(\mathbb{R})$ kalles positivt definitt hvis Q er symmetrisk og $x^t Qx > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

4a (vekt 5 %)

Vis at $Q \in M_n(\mathbb{R})$ er positivt definitt hvis og bare Q er symmetrisk og alle egenverdiene til Q er større enn 0.

(Fortsettes på side 3.)

4b (vekt 5 %)

Anta at $Q \in M_n(\mathbb{R})$ er positivt definitt. For $x, y \in \mathbb{R}^n$ setter vi

$$\langle x, y\rangle' = x^t Q y.$$

Sjekk at dette definerer et indreprodukt på $\mathbb{R}^n$.

4c (vekt 5 %)

La $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definer $T \in \mathbb{R}^n$ ved $T(x) = Ax$. Vis at T er symmetrisk med hensyn på $\langle x, y\rangle' = x^t Q y$ hvor Q er positivt definitt, hvis og bare hvis $QA = A^t Q$.

4d (vekt 5 %)

Sett nå

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Vis at T er symmetrisk med hensyn på $\langle\, , \rangle'$ hvis og bare hvis $c = 2b$.

SLUTT