UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT3000/4000 — Tall, rom og lineæritet.

Eksamensdag: Torsdag 7. juni 2012.

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

1a (vekt 5 %)

Finn et tall a mellom 0 og 1000 slik at $a \equiv 19 \pmod{37}$ og $a \equiv 0 \pmod{41}$.

Løsning: Vi har $a = 41k$ så $41k \equiv 19 \pmod{37}$ som gir $4k \equiv 19 \equiv 56 \pmod{37}$ så $k = 14$ og $a = 574$. Dette er det eneste løsningen, siden løsninger avviker med $37 \cdot 41 = 1517$.

1b (vekt 5 %)

La $f : \mathbb{Z}/(65) \to \mathbb{Z}/(65)$ være definert ved $f(\bar{x}) = \overline{33}\bar{x}^{25}$. Begrunn at f er en bijeksjon og finn en formel for f^{-1}.

Løsning: f er en bijeksjon siden $65 = 5 \cdot 13$ og $(25, 4 \cdot 12) = (25, 48) = 1$.

Hvis $f = m_a E_b$, så er $f^{-1} = E_{b^{-1}} m_{a^{-1}}$, hvor b^{-1} regnes ut i $\mathbb{Z}/(48)$. $33x \equiv 1 \pmod{65}$ gir $x = 2$ og for å løse $25x \equiv 1 \pmod{48}$ ser vi at

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \cdot 25 + 23 \\ 25 &= 1 \cdot 23 + 2 \\ 23 &= 11 \cdot 2 + 1, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} 1 &= 23 - 11 \cdot 2 = 23 - 11(25 - 1 \cdot 23) = 12 \cdot 23 - 11 \cdot 25 \\ &= 12(48 - 1 \cdot 25) - 11 \cdot 25 = 12 \cdot 48 - 23 \cdot 25, \end{aligned}$$

så $25^{-1} \equiv -23 \equiv 25 \pmod{48}$ og $f^{-1}(\bar{x}) = \bar{2}\bar{x}^{25}$.

1c (vekt 5 %)

Avgjør om $\bar{3}$ er en kvadratisk rest i $\mathbb{Z}/(67)$. Er 2012 en kvadratsum? (Hint: 503 er et primtall.)

(Fortsettes på side 2.)

Løsning: Eulers kriterium sier at $\overline{a} \neq 0$ er en kvadratisk rest i $\mathbb{Z}/(p)$ hvis og bare hvis $\overline{a}^{(p-1)/2} = \overline{1}$. For å regne ut $\overline{3}^{33}$ ser vi at

$$\overline{3}^2 = \overline{9} \quad \overline{3}^4 = \overline{81} = \overline{14} \quad \overline{3}^8 = \overline{14^2} = \overline{196} = \overline{62} = \overline{-5} \quad \overline{3}^{16} = \overline{25} \quad \overline{3}^{32} = \overline{625} = \overline{22}$$

så $\overline{3}^{33} = \overline{66} = \overline{-1}$ og vi ser at $\overline{3}$ ikke er en kvadratisk rest.

Vi ser at $2012 = 4 \cdot 503$, men siden $503 \equiv 3 \pmod 4$ er 2012 ikke en kvadratsum.

Oppgave 2

I hele denne oppgaven er

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

2a (vekt 10 %)

Hvilke betingelser må a, b, c og d tilfredsstille for at M skal være normal?

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned} MM^t &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} \\ M^tM &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

så M er normal når $b^2 = c^2$ og $ac+bd = ab+cd$. Dette gir at $c = \pm b$ og $(a-d)(b-c) = 0$ så enten er $c = b$ eller så er $c = -b$ og $d = a$. Det betyr at enten er M symmetrisk,

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix},$$

eller så $M = aI_2 + S$, hvor $S \neq 0$ er skjevsymmetrisk ($S^t = -S$),

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

2b (vekt 10 %)

Vis at hvis $M \in M_2(\mathbb{R})$ er normal og har reelle egenverdier, så er M symmetrisk. Uttrykk egenverdiene ved hjelp av a, b, c og d.

Løsning: Hvis M er normal så er M unitært diagonaliserbar, men hvis både M og alle egenverdiene er reelle, så må også egenvektorene være reelle. Da blir diagonaliseringsmatrisen også reell, så da er den ikke bare unitær, men også ortogonal. Da følger det at M er symmetrisk.

Hvis

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix},$$

så følger det av $\det(M - \lambda I) = (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$ at

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-b^2)}}{2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + b^2}}{2}.$$

(Fortsettes på side 3.)

2c (vekt 10 %)

Bruk resultatet fra oppgave 2a til å bestemme hvilke betingelser a, b, c og d må tilfredsstilleeskriv hvis $M \in M_2(\mathbb{R})$ er normal og har komplekse (ikke reelle) egenverdier. Uttrykk egenverdiene ved hjelp av a, b, c og d.

Løsning: Vi må nå se på det andre tilfellet i oppgave 2a, nemlig $M = aI_2 + S$, hvor $S \neq 0$ er skjevsymmetrisk, eller

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Da er $\det(M - \lambda I) = (a-\lambda)(a-\lambda) + b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + b^2 = 0$ og

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2+b^2)}}{2} = a \pm ib.$$

Oppgave 3

I hele denne oppgaven er

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

3a (vekt 5 %)

Anta at $M \in M_2(\mathbb{R})$ er ortogonal og at $\det M = 1$. Vis at M representerer en rotasjon med vinkel θ.

Løsning: De to kolonnene representerer to ortogonale enhetsvektorer. Vi kan derfor skrive den første som $(\cos\theta, \sin\theta)^t$ og den andre som $\pm(-\sin\theta, \cos\theta)$, men siden $\det M = 1$ får vi

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

som er en rotasjon med vinkel θ.

3b (vekt 10 %)

Anta at $M \in M_2(\mathbb{R})$ er ortogonal og at $\det M = 1$. Er M ortogonalt diagonaliserbar? Er M unitært diagonaliserbar? Finn eventuelle diagonale egenverdier og egenvektorbasiser som diagonaliserer ortogonalt eller unitært.

Løsning: M er bare symmetrisk hvis θ er et heltallsmultiplum av π, det vil si hvis $M = \pm I_2$, men da er M allerede diagonal. Men siden M er ortogonal er den også normal. Vi har

$$p_T(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1,$$

så egenverdiene er

$$\cos\theta \pm \sqrt{4\cos\theta - 4}/2 = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}.$$

For å finne egenvektorene løser vi

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 4.)

Vi får

$$\cos\theta u - \sin\theta v = (\cos\theta + i\sin\theta)u$$
$$\sin\theta u + \cos\theta v = (\cos\theta + i\sin\theta)v,$$

som når $\theta \neq n\pi$ begge reduseres til $v = -iu$, så $E_{e^{i\theta}}$ er utspent av $1/\sqrt{2}(1,-i)^t$. Tilsvarende finner vi at $E_{e^{-i\theta}}$ er utspent av $1/\sqrt{2}(1,i)^t$.

Vi setter derfor

$$P = 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$$

og ser at

$$P^*MP = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}.$$

3c (vekt 10 %)

La

$$N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Anta at $M \in M_2(\mathbb{R})$ er ortogonal og at $\det M = -1$. Vis at M representerer en speiling. (Hint: Finn egenvektorene.)

Løsning: Vi har

$$N = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

og

$$p_N(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin^2\theta = \lambda^2 - 1 = 0,$$

så egenverdiene er $\lambda = \pm 1$.

For å finne egenvektorene løser vi

$$N\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad N\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Vi får

$$\cos\theta u + \sin\theta v = u \quad \text{og} \sin\theta u - \cos\theta v = v,$$

så E_1 er utspent av $(\sin\theta, 1-\cos\theta)^t/\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ og

$$\cos\theta u + \sin\theta v = -u \quad \text{og} \quad \sin\theta u - \cos\theta v = -v,$$

som viser at E_{-1} er utspent av $(\sin\theta, 1+\cos\theta)^t/\sqrt{2(1+\cos\theta)}$. Det følger at N er en speiling i $(\sin\theta, 1-\cos\theta)^t$ langs $(\sin\theta, 1+\cos\theta)^t$.

3d (vekt 10 %)

Anta at $M \in M_2(\mathbb{R})$ er ortogonal og at $\det M = -1$. Er M ortogonalt diagonaliserbar? Er M unitært diagonaliserbar? Finn eventuelt en egenvektorbasis som diagonaliserer ortogonalt eller unitært.

Løsning: M er symmetrisk, og derfor ortogonalt (og dermed også unitært) diagonaliserbar. Hvis jeg setter

$$P = \begin{bmatrix} \sin\theta/\sqrt{2(1-\cos\theta)} & \sin\theta/\sqrt{2(1+\cos\theta)} \\ 1-\cos\theta/\sqrt{2(1-\cos\theta)} & 1+\cos\theta/\sqrt{2(1+\cos\theta)} \end{bmatrix},$$

får jeg

$$P^tMP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 4

En matrise $Q \in M_n(\mathbb{R})$ kalles positivt definitt hvis Q er symmetrisk og $x^t Qx > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

4a (vekt 5 %)

Vis at $Q \in M_n(\mathbb{R})$ er positivt definitt hvis og bare Q er symmetrisk og alle egenverdiene til Q er større enn 0.

Løsning: Siden Q er symmetrisk, kan vi skrive $Q = P^t DP$ hvor D er diagonal og P er ortogonal. Men da er $x^t Qx = (Px)^t D(Px)$. Hvis vi setter $y = Px$ og $D = (d_1, \ldots, d_n)$ så er $x \neq 0$ hvis og bare hvis $y \neq 0$ så $x^t Qx = \sum_{i=1}^n d_i y_i{}^2 > 0$ for $x \neq 0$ hvis og bare hvis alle $d_i > 0$.

4b (vekt 5 %)

Anta at $Q \in M_n(\mathbb{R})$ er positivt definitt. For $x, y \in \mathbb{R}^n$ setter vi

$$\langle x, y \rangle' = x^t Qy.$$

Sjekk at dette definerer et indreprodukt på $\mathbb{R}^n$.

Løsning: Det er åpenbart bilineært, symmetrisk siden Q er symmetrisk og $\langle x, x \rangle > 0$ for $x \neq 0$ siden Q er positivt definitt.

4c (vekt 5 %)

La $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definer $T \in \mathbb{R}^n$ ved $T(x) = Ax$. Vis at T er symmetrisk med hensyn på $\langle x, y \rangle' = x^t Qy$ hvor Q er positivt definitt, hvis og bare hvis $QA = A^t Q$.

Løsning: T er symmetrisk hvis og bare hvis

$$\langle T(x), y \rangle = \langle T^*(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle,$$

som er det samme som

$$x^t A^t Qy = x^t QAy,$$

så vi får at $QA = A^t Q$.

4d (vekt 5 %)

Sett nå

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Vis at T er symmetrisk med hensyn på $\langle \, , \rangle'$ hvis og bare hvis $c = 2b$.

Løsning:

$$QA = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A^t Q = \begin{bmatrix} 2a & c \\ 2b & d \end{bmatrix},$$

så T er symmetrisk hvis og bare hvis $c = 2b$.

SLUTT