

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT 4000 — Tall, rom og lineæritet

Eksamensdag: Fredag 7. juni 2013

Tid for eksamen: 09.00–13.00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er i alt 10 deloppgaver. Total score er 100 poeng.

Oppgave 1 [10 poeng]

Sjekk at $\bar{3}$ er en kvadratisk rest i $\mathbb{Z}/(23)$ og finn løsningene av likningen $\bar{x}^2 = \bar{3}$ i $\mathbb{Z}/(23)$ (uten å lage en tabell for \bar{x}^2).

Du får lov til å bruke at $\bar{3}^8 = \bar{6}$ i $\mathbb{Z}/(23)$ uten å beregne det selv.

Oppgave 2 [10 poeng]

La $g : \mathbb{Z}/(33) \rightarrow \mathbb{Z}/(33)$ være definert ved

$$g(\bar{x}) = (\overline{2x + 3})^9, \quad \bar{x} \in \mathbb{Z}/(33).$$

Begrunn at g er en bijeksjon og finn en formel for g^{-1} .

Oppgave 3

La p være et primtall og la d være den største felles divisoren av $p!$ og $(p-1)! + 1$.

a) [5 poeng] Hva sier Wilsons teorem? Bruk dette teoremet til å begrunne at $p \leq d$.

b) [10 poeng] Begrunn at $d = p$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4 [15 poeng]

Betrakt underrommene av \mathbb{C}^2 gitt ved

$$W_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_2 = z_1\}, \quad W_2 = \{(z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z'_2 = i z'_1\}.$$

Begrunn at $\mathbb{C}^2 = W_1 \oplus W_2$.

Beregn deretter standardmatrisen A til P , der P betegner projeksjonsavbildningen av \mathbb{C}^2 på W_1 langs W_2 .

Oppgave 5

La $A = \begin{bmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$.

a) [10 poeng] Begrunn at A er unitært diagonaliserbar og bestem en unitær matrise U som diagonaliserer A .

Betrakt nå lineæravbildningen $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ definert ved

$$T(p) = p(A), \quad p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}).$$

b) [10 poeng] Finn en basis for $R(T)$ og en basis for $N(T)$.

Oppgave 6

La $V \neq \{\mathbf{0}\}$ være et reelt endeligdimensjonalt indreproduktrom med $\dim V = n$ og anta at $S, T \in \mathcal{L}(V)$ begge er symmetriske.

a) [10 poeng] Anta at det fins en basis $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for V som består av vektorer som er egenvektorer for både S og T .

Begrunn at da er $ST = TS$.

Hint: Sammenlikn $(ST)(\mathbf{v}_j)$ og $(TS)(\mathbf{v}_j)$ for $j = 1, \dots, n$.

b) [10 poeng] Anta at $ST = TS$. La $\lambda \in \mathbb{R}$ være en egenverdi for T og la U betegne det assosierte egenrommet E_λ^T .

Begrunn at U er invariant under S . Begrunn også at restriksjonen S_U av S til U er en symmetrisk operator på U (med hensyn på indreproduktet som U arver fra V).

c) [10 poeng] Anta at $ST = TS$. Begrunn at det da fins en ortonormal basis \mathcal{B} for V som består av vektorer som er egenvektorer for både S og T .

SLUTT