UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3600/4600 — Matematisk logikk.
Eksamensdag:	Mandag 13. desember, 2004.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Vanskelighetsgraden av oppgavene stiger ikke nødvendigvis etterhvert, og det kan være en god idé å lese gjennom alle oppgavene før du begynner å svare. Dersom du finner oppgaveteksten uklar eller ufullstendig, så bør du opplyse om hvilken tolkning som ligger til grunn for din besvarelse.

Oppgave 1.

Følgende teoremer er hentet fra læreboka:

> **Teorem 1 (sunnhet og kompletthet).** La Σ være en mengde $\mathcal{L}$-formler, og la ϕ være er $\mathcal{L}$-formel. Vi har $\Sigma \vdash \phi$ hvis og bare hvis $\Sigma \models \phi$.
>
> **Teorem 2 (kompakthet).** La Σ være en mengde $\mathcal{L}$-formler. Hvis enhver endelig delmengde Σ_0 av Σ har en modell, så har Σ en modell.

a) Vis teorem 2. Du skal bruke teorem 1 som et lemma i beviset (og du skal selvsagt ikke vise teorem 1).

(Fortsettes side 2.)

En graf G er gitt ved en mengde noder V_G og en binær relasjon $\xrightarrow{G} \subseteq V_G \times V_G$. Vi sier at G er en *endelig* graf dersom mengden V_G er endelig. Vi sier at G har en *dekkende node* dersom det finnes en node $x \in V_G$ slik at relasjonen $x \xrightarrow{G} y$ holder for alle $y \in V_G$ der $y \neq x$. En graf H er en *subgraf* av en graf G dersom

(1) $V_H \subseteq V_G$

(2) hvis $x \xrightarrow{H} y$, så $x \xrightarrow{G} y$.

> **Teorem 3.** Hvis enhver endelig subgraf av G har en dekkende node, så har G en dekkende node.

b) Vis teorem 3. Bruk teorem 2 som et lemma i beviset.

Oppgave 2.

Denne oppgaven dreier seg om en førsteordens teori N^- over språket $\mathcal{L} = \{0, S, +, <\}$ hvor 0 er et konstantsymbol, S og $+$ er henholdsvis et unært og et binært funksjonsymbol, og $<$ er et binært relasjonsymbol. De ikkelogiske aksiomene i N^- er

1. $\forall x\,[\,Sx \neq 0\,]$.
2. $\forall xy\,[\,Sx = Sy \;\rightarrow\; x = y\,]$.
3. $\forall x\,[\,x + 0 = x\,]$.
4. $\forall xy\,[\,x + Sy = S(x + y)\,]$.
5. $\forall x\,[\,\neg x < 0\,]$.
6. $\forall xy\,[\,x < Sy \;\leftrightarrow\; (x < y \vee x = y)\,]$.
7. $\forall xy\,[\,x < y \;\vee\; x = y \;\vee\; y < x\,]$.

Vi ser at N^- er teorien N fra læreboka begrenset til språket $\{0, S, +, <\}$. Videre ser vi at $\mathfrak{N} \models N^-$ der $\mathfrak{N}$ er standardmodellen, dvs. $\mathcal{L}$-strukturen hvor grunnmengden N består av de naturlige tallene, hvor 0 tolkes som tallet 0, S som etterfølgerfunksjonen, + som addisjonfunsksjonen og < "som ekte mindre enn". La $\overline{0} = 0$ og $\overline{n+1} = S\overline{n}$. Følgende lemma holder.

(Fortsettes side 3.)

Lemma. La $a, b \in \mathrm{N}$.

1. Hvis $a = b$, så $N^- \vdash \overline{a} = \overline{b}$.
2. Hvis $a \neq b$, så $N^- \vdash \overline{a} \neq \overline{b}$.
3. Hvis $a < b$, så $N^- \vdash \overline{a} < \overline{b}$.
4. Hvis $a \not< b$, så $N^- \vdash \neg \overline{a} < \overline{b}$.
5. $N^- \vdash \overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$.

a) Vis punkt 3 av lemmaet. Hint: induksjon på b.

Når du løser oppgavene under kan du bruke lemmaet.

b) La $a, b \in \mathrm{N}$ være slik at $a \geq b$. Vis at $N^- \vdash \forall x\,[\, x + S\overline{a} \neq \overline{b}\,]$. Hint: induksjon på b.

c) La $a, b \in \mathrm{N}$. Vis at $N^- \vdash \exists x\,[\, x + S\overline{a} = \overline{b}\,] \;\leftrightarrow\; \overline{a} < \overline{b}$.

d) Vis at $N^- \nvdash \forall yz\,[\,\exists x\,[\, x + Sy = z\,] \;\leftrightarrow\; y < z\,]$.

Vi sier at en $\mathcal{L}$-teori T er *ufullstendig* dersom det finnes et $\mathcal{L}$-utsagn ϕ slik at $T \nvdash \phi$ og $T \nvdash \neg\phi$.

e) Gi et $\mathcal{L}$-utsagn ψ slik at $N^- \nvdash \psi$ og $N^- \nvdash \neg\psi$. Følger det av Gödels ufullstendighetsteorem at N^- er en ufullstendig teori? Svar kort, men begrunn svarene du gir.

En ordningsrelasjon $\prec \subseteq M \times M$ er en *velfundert* ordning av M dersom det ikke finnes en uendelig sekvens $a_0, a_1, a_2, \ldots$ av elementer fra M slik at $a_{i+1} \prec a_i$ for alle $i \in \mathrm{N}$. Det er opplagt at $<^{\mathfrak{N}}$ er en velfundet ordning av grunnmengden N.

f) Vis at det finnes en $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{A}$ slik at $\mathfrak{A}$ (i) $\mathfrak{A} \models N^-$ og (ii) $<^{\mathfrak{A}}$ ikke er en velfundert ordning av grunnmengden A.

Den uformelle påstanden "for ethvert element x er det slik at det ikke finnes et element som ligger mellom x og etterfølgeren til x" kan uttrykkes med $\mathcal{L}$-utsagnet

$$\sigma \;\equiv\; \forall x\,[\,\neg\exists y\,[\, x < y \;\wedge\; y < Sx\,]\,]\,.$$

g) La $\mathfrak{A}$ være $\mathcal{L}$-strukturen fra oppgave f. Er det riktig at $\mathfrak{A} \models \sigma$? Finnes det en $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{B}$ slik at $\mathfrak{B} \models N^-$ og $\mathfrak{B} \not\models \sigma$? Begrunn svarene.

SLUTT