UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT4000 — Tall, rom og lineæritet.
Eksamensdag:	Torsdag 11. juni 2009.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

MERK : Ved sensuren vil oppgavene 1a), 1b), 2b), 3a), 3b), 3c), 4 og 5 telle 10 poeng hver. Oppgave 2a) vil telle 5 poeng, mens oppgave 6 vil telle 15 poeng. Maks. poengsum blir dermed 100 poeng.

Oppgave 1

a) Begrunn at likningen $\overline{42} \cdot \overline{x} = \overline{12}$ har løsninger i $\mathbb{Z}/(60)$ og angi alle løsningene.

b) La $a \in \mathbb{N}$. Bestem verdiene av a som er slik at likningene $\overline{42} \cdot \overline{x} = \overline{12}$ og $\overline{55} \cdot \overline{x} = \overline{5a}$ har (minst) en felles løsning i $\mathbb{Z}/(60)$.

Oppgave 2

a) Avgjør om 561 er en kvadratsum.

b) Et naturlig tall N kalles et *Carmichael tall* dersom N ikke er et primtall og $a^N \equiv a \pmod{N}$ for alle $a \in \mathbb{Z}$.

Begrunn at 561 er et Carmichael tall.

Kommentar : 561 er faktisk det minste Carmichael tallet.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3

La V være det reelle vektorrommet som består av alle 2×2 reelle symmetriske matriser. Definer $T \in \mathcal{L}(V)$ ved

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4a+c & 2b \\ 2b & -a+2c \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) Beregn determinanten $\det(T)$, trasen $\mathrm{Tr}(T)$ og det karakteristiske polynomet p_T.

b) Begrunn at T ikke er diagonaliserbar, og at T er triangulerbar.

c) Finn en basis $\mathcal{C}$ for V slik at $[T]_{\mathcal{C}}$ er øvre triangulær.

Oppgave 4

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{C}$, $V \neq \{\mathbf{0}\}$, og la $T \in \mathcal{L}(V)$. Betrakt følgende to utsagn :

(i) T er diagonaliserbar.

(ii) Det fins en basis $\mathcal{B}$ for V slik at $[T]_{\mathcal{B}}$ er normal.

Holder implikasjonene $(i) \Rightarrow (ii)$ og $(ii) \Rightarrow (i)$ generelt ? Begrunn ditt svar.

Oppgave 5

Vi betrakter vektorrommet $V = \mathcal{P}(\mathbb{K})$ som består av alle polynomene i en variabel med koeffisienter i $\mathbb{K}$ (der $\mathbb{K}$ betegner $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), og minner om at $\mathcal{B} = \{p_j \mid j = 0, 1, 2, \dots\}$ er en basis for V, der $p_0(x) = 1$ og $p_j(x) = x^j$ når $x \in \mathbb{K}$ og $j \in \mathbb{N}$.

La $T \in \mathcal{L}(V)$ være bestemt ved at $T(p_j) = p_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \dots,$ og la $O \in \mathcal{L}(V)$ betegne nullavbildningen.

Begrunn at $p(T) \neq O$ for alle $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ som ikke er lik nullpolynomet. (*Hint*. Beregn $p(T)$ i p_0).

Forklar hvorfor dette ikke strider imot Cayley-Hamilton teoremet.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 6

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom (over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). La $T \in \mathcal{L}(V)$ og anta at $R(T) = R(T^2)$.

Begrunn at $N(T) = N(T^2)$. Begrunn deretter at $V = R(T) \oplus N(T)$.

SLUTT