UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT4300/9300 — Mål- og integrasjonsteori.
Eksamensdag:	Tirsdag, 2. desember, 2008.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle svarene må begrunnes.

Oppgave 1 La $X = [0, 2]$ og la λ være Lebesguemålet på σ-algebraen $\mathbb{X}$ av Lebesguemålbare delmengder av X.
La

$$\mu(E) = \int_E x^3 d\lambda$$

for $E \in \mathbb{X}$.
La $g(x) = x^4$ på X.
Finn

$$\int g d\mu.$$

Oppgave 2

a) La $(X, \mathbb{X})$ være et målbart rom og la λ være et fortegnsmål (charge) på $\mathbb{X}$.
Forklar hva vi mener med en *Hahndekomposisjon* og en *Jordandekomposisjon* av λ, og sammenhengen mellom dissse begrepene.
Nå, la $X = [1, \infty]$, la $\mathbb{X}$ være σ-algebraen av Borelmengder i X og la μ

(Fortsettes side 2.)

være Lebesguemålet på $\mathbb{X}$.
La

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^{-n} \mu(E \cap [n, n+1]).$$

Vis at λ er et fortegnsmål ved å finne en Hahndekomposisjon og Jordandekomposisjonen til λ.

b) Formuler Lebesgues dekomposisjonsteorem og forklar hva vi mener med $\perp$ and $\ll$.
Finn Lebesguedekomposisjonen til μ med hensyn på λ^+, hvor λ^+ er avledet fra λ i a).

Oppgave 3 La X være enhetsintervallet $[0, 1]$, la $\mathbb{X}$ være σ-algebraen av Lebesguemålbare delmengder av X og la λ være Lebesguemålet på $\mathbb{X}$.
La μ være produktmålet

$$\mu = \lambda \times \lambda$$

på $X \times X$.

a) Vis at ethvert rett linjestykke, sett som en delmengde av $X \times X$, vil være μ-målbar og ha μ-mål 0.

b) La $F : X \times X \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$F(x, y) = |x^2 - y|.$$

Vis at F er μ-integrerbar og beregn

$$\int F d\mu.$$

c) For hver $n \in \mathbb{N}$, la

$$F_n(x, y) = |(x + \frac{1}{n})^2 - (y - \frac{1}{n})|$$

hvis x er irrasjonal,

$$F_n(x, y) = x^{\frac{1}{n}} y^n$$

hvis $x \in \mathbb{Q}$.
Finn

$$\lim_{n \to \infty} \int F_n d\mu.$$

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 4 La X være en mengde, og la $\mathbb{Z}_0$ være en tellbar algebra av delmengder av X.
Vi sier at $\mathbb{Z}_0$ er *kompakt* hvis det hver gang

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

med E og hver E_n i $\mathbb{Z}_0$, finnes en $k \in \mathbb{N}$ slik at

$$E = \bigcup_{n=1}^{k} E_n.$$

a) Vis at hvis $\mathbb{Z}_0$ er en kompakt algebra på X, så vil enhver endelig additiv funksjon

$$\mu : \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ha en entydig utvidelse til et mål μ^* på σ-algebraen $\mathbb{Z}$ generert fra $\mathbb{Z}_0$, hvor $\mathbb{R}_{\geq 0}$ betegner de ikkenegative reelle tallene.

Nå, la X være mengden av funksjoner $\alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.
Hvis

$$\sigma = (a_1, \ldots, a_n)$$

er en endelig sekvens fra $\{0, 1\}$, la

$$B_\sigma = \{\alpha \in X \mid \alpha(i) = a_i \text{ for } i = 1, \ldots, n\}.$$

La $\mathbb{X}_0$ være mengden av endelige unioner

$$B_{\sigma_1} \cup \cdots \cup B_{\sigma_k}$$

hvor hver σ_j er en endelig sekvens fra $\{0, 1\}$.
Som konvensjon lar vi $X = B_e$ hvor e er den tomme sekvensen, og vi lar $\emptyset$ være unionen over når $k = 0$.

b) Vis at $\mathbb{X}_0$ er en algebra.

c) La $\mathbb{X}$ være den minste σ-algebraen som utvider $\mathbb{X}_0$.
Vis at det finnes ett og bare ett mål μ på $\mathbb{X}$ slik at vi for alle $n \in \mathbb{N}$ har at

$$\mu(B_\sigma) = 2^{-n}$$

når $\sigma = (a_1, \ldots, a_n)$ er en sekvens av lengde n.

SLUTT