UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3600/4600 — Matematisk logikk.
Eksamensdag:	Torsdag 8. desember, 2005.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $\mathcal{L}$ være førsteordens språket $\{a, b, f, R\}$ hvor a og b er konstantsymbol, f er et funksjonsymbol med aritet 2 og R er et relasjonsymbol med aritet 1.

a) Gi en $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{A}$ hvor grunnmengden A er uendelig. Gi et eksempel på en lukket formel som holder, og et eksempel på en lukket formel som ikke holder, i denne strukturen. Du skal med andre ordre gi ϕ og ψ slik at $\mathfrak{A} \models \phi$ og $\mathfrak{A} \not\models \psi$.

La Σ være mengden som består av de tre $\mathcal{L}$-formelene

1. $R(a)$
2. $\neg R(b)$
3. $\forall x \forall y [R(f(x, y)) \leftrightarrow R(x) \vee R(y)]$

b) Gi en $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{A}$ slik at (i) grunnmengden A har nøyaktig 2 elementer og (ii) $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

c) Gi en $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{A}$ slik at (i) grunnmengden A har nøyaktig 3 elementer og (ii) $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

(Fortsettes side 2.)

d) Argumenter kort for at det ikke finnes en $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{A}$ slik at (i) grunnmengden A har ett element og (ii) $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

e) Vis at $\Sigma \vdash R(f(a,b))$ ved å gi en Σ-utledning av $R(f(a,b))$.

f) Vis at $\Sigma \vdash \neg R(f(b,b))$ ved å gi en Σ-utledning av $\neg R(f(b,b))$.

g) Vis at vi har
$$\Sigma \vdash R(t) \text{ eller } \Sigma \vdash \neg R(t)$$
for enhver lukket $\mathcal{L}$-term t. (Hint: induksjon på oppbygningen av t.)

h) Vis at vi har
$$\Sigma \vdash \phi \text{ eller } \Sigma \vdash \neg\phi$$
for enhver lukket kvantorfri $\mathcal{L}$-formel ϕ.

i) La $\phi \equiv \forall x[x = a \vee x = b]$. Vis at $\Sigma \nvdash \phi$ og $\Sigma \nvdash \neg\phi$.

j) La $\Sigma' = \Sigma \cup \{\forall x[x = a \vee x = b]\}$. Argumenter kort for at Σ' er en fullstendig teori, dvs. at vi har $\Sigma' \vdash \phi$ eller $\Sigma' \vdash \neg\phi$ for enhver lukket $\mathcal{L}$-formel ϕ. (Hint: kompletthetsteoremet for førsteordens logikk.)

Oppgave 2.

Nedenfor finner du to versjoner av kompeletthetsteoremet for førsteordens logikk.

Teorem 1. La Σ være en mengde $\mathcal{L}$-formler, og la ϕ være er $\mathcal{L}$-formel. Vi har $\Sigma \vdash \phi$ hvis og bare hvis $\Sigma \models \phi$.

Teorem 2. La Σ være en mengde $\mathcal{L}$-formler. Da er Σ konsistent hvis og bare hvis Σ har en modell.

a) Forklar hva det betyr at en mengde formler er konsistent. Forklar hva det betyr at en mengde formler har en modell. Svar kort.

b) Argumenter for at de to versjonene av kompletthetsteoremet er ekvivalente ved å forklare (i) hvordan teorem 1 følger fra teorem 2 og (ii) hvordan teorem 2 følger fra teorem 1.

c) La Σ være en konsistent mengde lukkede formler over et førsteordens språk $\mathcal{L}$, og la ϕ være en lukket $\mathcal{L}$-formel. Bruk deduksjonsteoremet til vise at minst en av mengdene $\Sigma \cup \{\phi\}$ og $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ er konsistent.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

Språket $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S, +, \cdot, E, <\}$ er kjent fra læreboka. La $\mathfrak{N}$ betegne standardmodellen for $\mathcal{L}_{NT}$. Vi kjenner også $\mathcal{L}_{NT}$-aksiomene N fra læreboka. Vi vet at $\mathfrak{N} \models N$ og at

$$\mathfrak{N} \models \phi \text{ hvis og bare hvis } N \vdash \phi$$

for enhver lukket Σ-formel ϕ. Vi antar en gödelnummerering av $\mathcal{L}_{NT}$-formlene og lar $\ulcorner \phi \urcorner$ betegne gödelnummeret til $\mathcal{L}_{NT}$-formelen ϕ.

La $\mathcal{L}_0$ være et vilkårlig førsteordens språk og la $\mathfrak{A}$ være en $\mathcal{L}_0$-struktur. Vi antar også en gödelnummerering av $\mathcal{L}_0$-formlene og lar $\ulcorner \psi \urcorner$ betegne gödelnummeret til $\mathcal{L}_0$-formelen ψ. La A være en rekursiv mengde $\mathcal{L}_0$-aksiomer slik at $\mathfrak{A} \models A$.

a) Forklar hvorfor det finnes en $\mathcal{L}_{NT}$-formel $Thm_A(x)$ slik at

$$\mathfrak{N} \models Thm_A(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \text{ hvis og bare hvis } A \vdash \psi \, .$$

La $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ være en rekursiv funksjon slik at vi har

$$\mathfrak{N} \models \phi \text{ hvis og bare hvis } \mathfrak{A} \models \psi$$

når $f(\ulcorner \phi \urcorner) = \ulcorner \psi \urcorner$. La $F(x, y)$ være en $\mathcal{L}_{NT}$-formel som representerer f. La N' være N utvidet med aksiomet

$$\exists y [\, F(\overline{\ulcorner \phi \urcorner}, y) \ \wedge \ Thm_A(y) \,] \ \rightarrow \ \phi$$

for enhver lukket $\mathcal{L}_{NT}$-formel ϕ.

b) Forklar hvorfor N' er en konsistent og rekursiv mengde $\mathcal{L}_{NT}$-aksiomer.

c) Forklar hvorfor det finnes en $\mathcal{L}_0$-formel ψ slik at $A \nvdash \psi$ og $A \nvdash \neg\psi$. Forklaringen skal referere til ett eller flere av de viktigste teoremene i læreboka.

SLUTT