UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3600/4600/9600 — Matematisk logikk.
Eksamensdag:	Fredag 8. desember, 2006.
Tid for eksamen:	15.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Beviskalkylen i læreboka inneholder sluttningsregelen QR:

$$\langle \{\psi \to \phi\}, \psi \to (\forall x \phi) \rangle.$$

En betingelse for å anvende regelen er at det ikke finnes frie forekomste av x i ψ. Videre så inneholder beviskalkylen aksiomet Q1:

$$(\forall x \phi) \to \phi^x_t, \text{ hvis } t \text{ er substituerbar for } x \text{ i } \phi.$$

a) Forklar kort og uformelt hva det betyr at det finnes frie forekomster av x i ψ. Gi et eksempel på en førsteordens formel med frie forekomster av x.

b) Forklar kort og uformelt hva det betyr at t er substituerbar for x i ϕ. Gi et eksempel på en førsteordens formel ϕ og en term t hvor t *ikke er* substituerbar for x i ϕ.

Teorem (I). *La $n \geq 1$, og la $\phi_1, \ldots, \phi_n$ være førsteordens formler hvor variabelen y ikke forekommer. Da har vi*

$$\{\, \forall x_1[\phi_1], \ldots, \forall x_n[\phi_n] \,\} \vdash \forall y \,[\, (\phi_1)^{x_1}_y \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; (\phi_n)^{x_n}_y \,]\;.$$

($(\phi_i)^{x_i}_y$ er formelen ϕ_i hvor x_i er erstattet med y.)

(Fortsettes side 2.)

c) Vis teorem **(I)**. Beviset skal ikke referere til lemmaer og teoremer fra læreboka.

Oppgave 2.

La $\mathcal{L}$ være førsteordens språket $\{c, f, g\}$ hvor f og g er unære funksjonsymboler og c er et konstantsymbol. La

- $\phi \equiv \forall x[f(f(x)) = f(x)]$ (ϕ sier at f er *idempotent*)
- $\psi \equiv \forall x[g(f(x)) = x]$ (ψ sier at g er *inversfunksjonen* til f)
- $\theta \equiv \forall x[f(x) = c]$ (θ sier at f er en *konstantfunksjon*)
- $\eta \equiv \forall x[f(x) = x]$ (η sier at f er *identitetsfunksjonen*).

a) Gi en $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{A}$ slik at $\mathfrak{A} \models \phi$ og $\mathfrak{A} \not\models \psi$.

b) Gi en $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{B}$ slik at $\mathfrak{B} \not\models \phi$ og $\mathfrak{B} \models \psi$.

c) Forklar hvorfor $\{\phi\} \not\vdash \psi$ og $\{\psi\} \not\vdash \phi$. Svar kort.

Lemma I. *Vi har*

1. $\vdash t_1 = t_1$
2. $\vdash t_1 = t_2 \;\rightarrow\; t_2 = t_1$
3. $\vdash t_1 = t_2 \,\wedge\, t_2 = t_3 \;\rightarrow\; t_1 = t_3$

for alle $\mathcal{L}$*-termer* t_1*,* t_2 *og* t_3*.*

d) Vis at $\{\theta\} \vdash \phi$ ved å gi en $\{\theta\}$-utledning av ϕ. Du kan bruke lemma **(I)** uten å føre et bevis for lemmaet. Hvis du benytter andre lemmaer, så bør du vise dem.

e) Vis at $\{\phi, \psi\} \vdash \eta$ ved å gi en $\{\phi, \psi\}$-utledning av η. Du kan bruke lemma **(I)** uten å føre et bevis for lemmaet. Hvis du benytter andre lemmaer, så bør de bevises.

La A betegne grunnmengden til $\mathcal{L}$-strukturen $\mathfrak{A}$, og la $|A|$ betegne kardinaliteten til A. Videre, la n være et heltall større eller lik 1, og la ξ_n betegne en $\mathcal{L}$-formel slik at

$$\mathfrak{A} \models \xi_n \text{ hvis og bare hvis } |A| = n.$$

(ξ_n sier at grunnmengen inneholder nøyaktig n elementer.)

(Fortsettes side 3.)

f) Gi en formel ξ_3 med den nevnte egenskapen.

g) La $\Sigma = \{\phi, \psi, \xi_{17}\}$. Forklar hvorfor Σ er en fullstendig teori, dvs. forklar hvorfor vi for enhver $\mathcal{L}$-formel α har enten $\Sigma \vdash \alpha$ eller $\Sigma \vdash \neg\alpha$.

Oppgave 3.

Førsteordens språket $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S, +, \times, E, <\}$ er kjent fra læreboka. Det er også $\mathcal{L}_{NT}$-strukturen $\mathfrak{N}$ som ofte omtales som standardmodellen. N er mengden av naturlige tall. N er grunnmengden til standardmodellen.

La $a, b, c \in$ N. Vi sier at a er lik b modulo c, og bruker notasjonen $a = b \pmod{c}$, dersom a og b gir samme rest når de heltallsdivideres på c.

a) Finn en $\mathcal{L}$-formel $\phi(x, y, z)$ slik at

$$\mathfrak{N} \models \phi(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \text{ hvis og bare hvis } a = b \pmod{c}$$

for alle $a, b, c \in$ N.

b) Konstruer en $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{A}$ med grunnmengde A slik at (i) N $\subseteq A$ og N $\neq A$ og (ii) for enhver $\mathcal{L}$-formel σ, har vi $\mathfrak{A} \models \sigma$ hvis og bare hvis $\mathfrak{N} \models \sigma$.

c) La $\mathfrak{A}$ være strukturen fra oppgave **b**, og la $\phi(x, y, z)$ være formelen fra oppgave **a**. Videre, la $s : \mathit{Vars} \to A$ være en vilkårlig tilordningsfunksjon. Vis at det finnes uendelig mange $a \in A \setminus$ N slik at $\mathfrak{A} \models \phi(x, \overline{0}, \overline{2})[s[x|a]]$.

SLUTT