UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3600/4600 — Matematisk logikk.
Eksamensdag:	Mandag 10. desember, 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Beviskalkylen i læreboka inneholder de to sluttningsreglene:

- $\langle \{\psi \to \phi\}, \psi \to (\forall x \phi) \rangle$
- $\langle \{\phi \to \psi\}, (\exists x \phi) \to \psi \rangle$.

En betingelse for å anvende reglene er at det ikke finnes frie forekomster av x i ψ. Videre så inneholder beviskalkylen aksiomene:

- $(\forall x \phi) \to \phi^x_t$, hvis t er substituerbar for x i ϕ
- $\phi^x_t \to (\exists x \phi)$, hvis t er substituerbar for x i ϕ.

a) Forklar kort og uformelt hva det betyr at det finnes frie forekomster av x i ψ. Gi et eksempel på en førsteordens formel med frie forekomster av x.

b) Forklar kort og uformelt hva det betyr at t er substituerbar for x i ϕ. Gi et eksempel på en førsteordens formel ϕ og en term t hvor t *ikke er* substituerbar for x i ϕ.

(Fortsettes side 2.)

c) Bevis at

$$\vdash \ \exists x[\,\phi_1 \ \wedge \ \phi_2\,] \ \rightarrow \ \exists x[\phi_1] \ \wedge \ \exists x[\phi_2]$$

ved å gi en utledning. Beviset skal ikke referere til lemmaer og teoremer fra læreboka.

d) La $n \in \mathbb{N}$ og la $\phi_1, \ldots, \phi_n$ være vilkårlige førsteordens fomler. Bevis ved induksjon på n at

$$\vdash \ \exists x[\,\phi_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \phi_n\,] \ \rightarrow \ \exists x[\phi_1] \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \exists x[\phi_n]$$

for enhver $n > 0$. Beviset skal ikke referere til lemmaer og teoremer fra læreboka.

e) La ϕ_1 og ϕ_2 være vilkårlige førsteordens fomler. Er det alltid slik at

$$\vdash \ \exists x[\phi_1] \ \wedge \ \exists x[\phi_2] \ \rightarrow \ \exists x[\,\phi_1 \ \wedge \ \phi_2\,]\,?$$

Begrunn svaret. Du kan referere til sunnhetsteoremet for førsteordens logikk.

Oppgave 2.

La P og Q være unære relasjonsymboler, la S være et unært funksjonsymbol, og la 0 være et konstantsymbol. La $\mathcal{L}$ være førsteordens språket $\{0, S, P, Q\}$, og la Σ_0 være $\mathcal{L}$-teorien som består av de tre ikkelogiske aksiomene

- $\forall x[\neg 0 = Sx]$
- $\forall xy[Sx = Sy \ \rightarrow \ x = y]$
- $\exists x[Px] \ \wedge \ \exists x[Qx] \ \rightarrow \ \exists x[\,Px \ \wedge \ Qx\,]$.

a) La $\mathfrak{A}$ være en $\mathcal{L}$-struktur for Σ_0, dvs. $\mathfrak{A} \models \Sigma_0$. Vis at grunnmengden til $\mathfrak{A}$ er uendelig.

b) Gi to $\mathcal{L}$-strukturer $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$. Stukturene skal oppfylle følgende krav:

   – grunnmengden til $\mathfrak{A}$ er $\mathbb{N}$

   – grunnmengden til $\mathfrak{B}$ er $\mathbb{N}$

   – $\mathfrak{A} \models \Sigma_0$ og $\mathfrak{B} \not\models \Sigma_0$.

   ($\mathbb{N}$ er mengden av naturlige tall, dvs. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.)

(Fortsettes side 3.)

La

- $\Sigma_1 \ = \ \Sigma_0 \cup \{ \forall x[Px \leftrightarrow \neg Qx] \}$
- $\Sigma_2 \ = \ \Sigma_1 \cup \{ \exists x[Px] \wedge \exists x[Qx] \}$.

c) Hva betyr det at en mengde $\mathcal{L}$-formler er inkonsistent?

d) Vis at Σ_2 er en inkonsistent teori.

e) Er det slik at $\Sigma_1 \vdash \exists x[Px]$? Er det slik at $\Sigma_1 \vdash \neg\exists x[Px]$? Begrunn svaret.

La $\Sigma_3 \ = \ \Sigma_1 \cup \{\forall x[Px]\}$.

f) Anta at $\mathcal{L}$ er et førsteordens språk *uten* likhet, dvs. at relasjonsymbolet $=$ ikke er med i språket. La $\mathcal{L}$-strukturene $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ være slik at $\mathfrak{A} \models \Sigma_3$ og $\mathfrak{B} \models \Sigma_3$. Vis at vi har

$$\mathfrak{A} \models \phi \text{ hvis og bare hvis } \mathfrak{B} \models \phi$$

for enhver $\mathcal{L}$-formel ϕ.

g) Anta så at $\mathcal{L}$ er et førsteordens språk *med* likhet. Er det mulig å finne strukturer $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ og en $\mathcal{L}$-formel ϕ slik at

$$\mathfrak{A} \models \Sigma_3 \quad \text{og} \quad \mathfrak{A} \models \phi$$

og

$$\mathfrak{B} \models \Sigma_3 \quad \text{og} \quad \mathfrak{B} \models \neg\phi \, ?$$

Hvis svaret er ja, skal du gi to slike strukturer. Hvis svaret er nei, skal du forklare hvorfor.

Oppgave 3.

a) Hva betyr det at en mengde er rekursiv? Gi lærebokas definisjon. Svar kort.

b) Hva betyr det at en førsteordens teori er aksiomatiserbar? Hva betyr det at en førsteordens teori er komplett (fullstendig)? Svar kort.

c) Er teorien Σ_3 fra oppgave 2 en aksiomatiserbar, konsistent og komplett teori? Spiller det noen rolle i så måte om språket inneholder likhet? Begrunn svaret.

SLUTT