

Oppgavehefte

i

MEK1500 - Faststoffmekanikk

av

Henrik Mathias Eiding

og

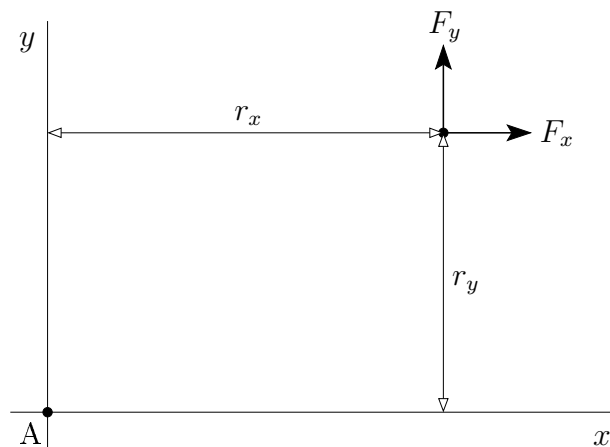
Harald Osnes

August 2007

Oppgave 1

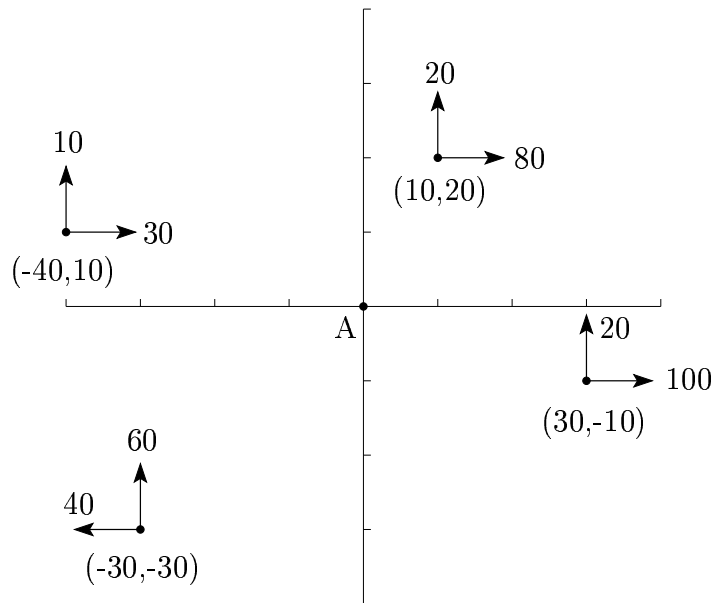
En kraft har x - og y -komponentene F_x og F_y . Avstanden fra et gitt punkt A til et punkt på kraftens angrepslinje er r_x og r_y i henholdsvis x - og y -retning, se figur 1. Momentet til F om z -aksen er derfor

$$M_z = r_x F_y - r_y F_x. \quad (1)$$



Figur 1: Kraften gir et moment om z -aksen.

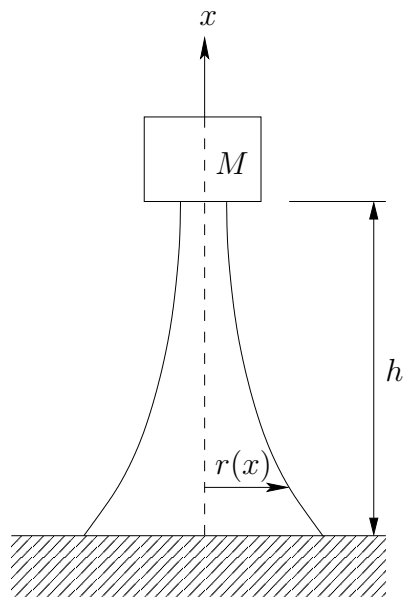
Ved å benytte ligning (1), lag et Matlab-script som beregner momentet om A til kraftsystemet vist i figur 2. Finn også resultantkraftens komponenter og størrelse.



Figur 2: Kraftsystem.

Oppgave 2

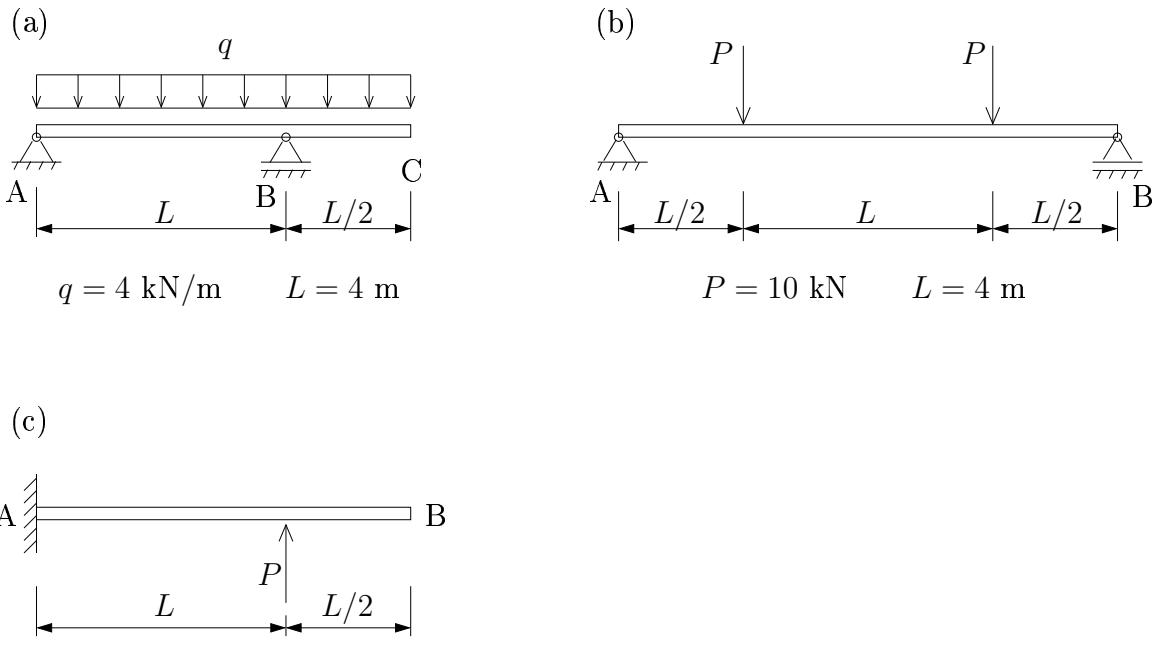
Det skal lages et $h = 100$ m høyt tårn av betong som på toppen skal bære en masse $M = 200\,000$ kg, se figur 3. Tårnets tverrsnitt skal være sirkulært over hele høyden. Betongens egenvekt og maksimalt tillatte spenning er henholdsvis $\rho_b = 2400$ kg/m³ og $\sigma_{maks} = 1$ N/mm². Bestem en egnet form på tårnet dersom det kreves at ethvert tverrsnitt skal utsettes for samme spenning. Bruk Matlab til å plote tårnets radius som funksjon av x .



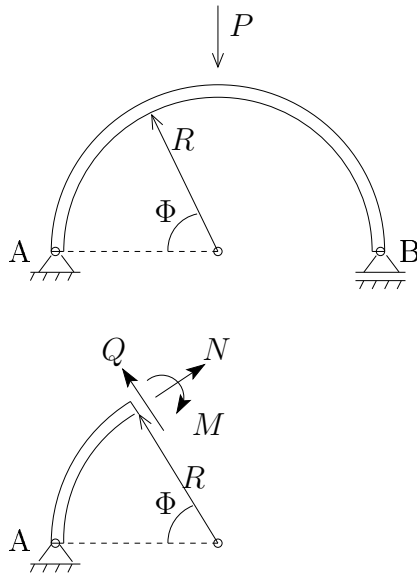
Figur 3: Tårn med sirkulært tverrsnitt.

Oppgave 3

1. Beregn opplagerreaksjoner, skjærkrefter og momenter for bjelkene i figur 4. Tegn moment- og skjærkraftdiagrammer og vis retninger på de indre kreftene.
2. Buen AB i figur 5 er fritt opplagt ved A og B og har form som en halvsirkel. Opplageret i B er et rullelager som kan bevege seg fritt i horisontalretningen. Finn aksialkraften (N), skjærkraften (Q) og momentet (M) på grunn av lasten P uttrykt ved P , R og Φ for $0 \leq \Phi \leq \pi/2$.



Figur 4: Bjelkene det skal beregnes for.



Figur 5: Buen det skal beregnes for.

Oppgave 4

- a) Et kubisk legeme av lineært elastisk materiale er belastet med normalspenningene σ_x , σ_y og σ_z . Uttrykk normaltøyningene ε_x , ε_y og ε_z ved normalspenningene og de elastiske konstantene E og ν . Legg uttrykkene inn i Matlab (som matrise-vektor-produkt) og finn spenningene i legemet når følgende er gitt:

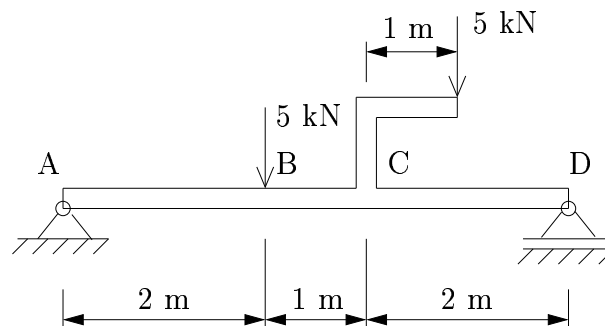
$$\varepsilon_x = 0.0002 \quad \varepsilon_y = -0.00015 \quad \varepsilon_z = 0.0002$$

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0,25$$

- b) Uttrykk nå normalspenningene ved normaltøyningene og legg dette inn i Matlab. Finn spenningene i legemet og sammenlign svaret med oppgave a).
- c) Beregn spenningstilstanden dersom normaltøyningen i y -retning endres til $\varepsilon_y = 0$. Hva slags tilstand har vi nå? Er endringene i spenningene som forventet?
- d) Hva slags tilstand har vi dersom $\sigma_y = 0$? Kan tilstanden i c) og d) opptre samtidig?

Oppgave 5

Beregn moment- og skjærkraftfordelingen for bjelken ABCD vist i figur 6. Plott diagrammene ved å bruke Matlab.

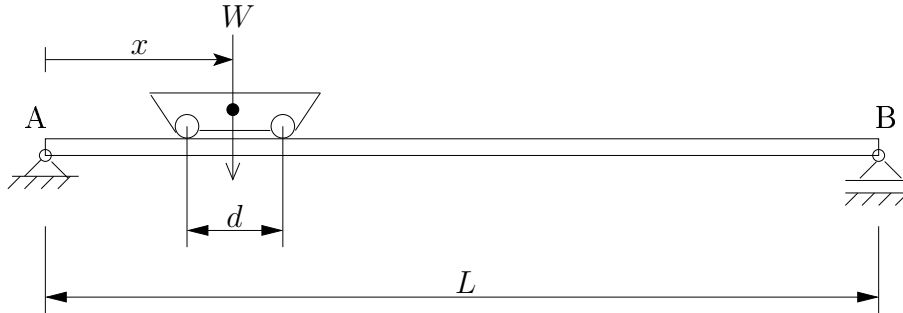


Figur 6: Fritt opplagt bjelke.

Oppgave 6

En vogn med vekt W triller langs en fritt opplagt bjelke, som vist i figur 7. Det er kun kontakt mellom bjelken og vognens hjul, som står i en avstand d fra hverandre. Vis at bjelkens maksimale moment inntreer når avstanden mellom et av opplagene og nærmeste hjul er c , der c er gitt ved

$$c = \frac{L}{4} \left(2 - \frac{d}{L} \right).$$

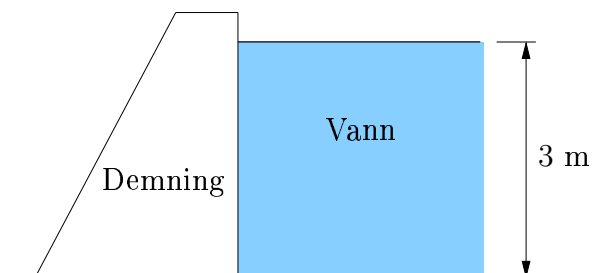


Figur 7: Vognen kan trille fritt fra A til B.

Beregn også momentet i bjelkens midtpunkt som funksjon av posisjonen x til vognens midtpunkt ($x \in [d/2, L - d/2]$). Sett $L = 6$ m, $d = 0.5$ m og $W = 80$ kN og plott grafen ved hjelp av Matlab.

Oppgave 7

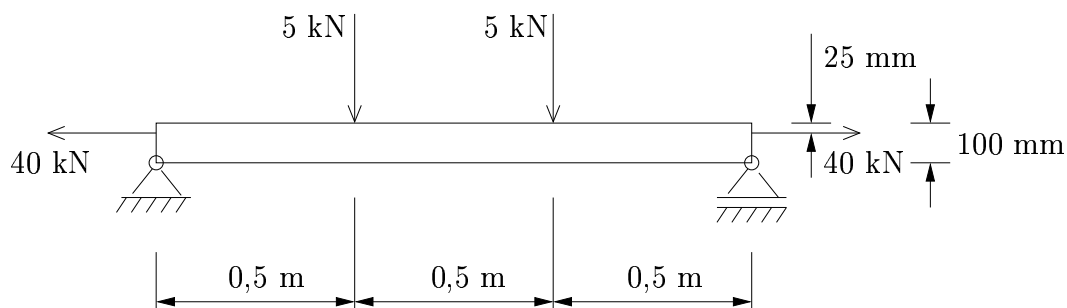
Figur 8 viser en 3 m dyp demning. Demningen har en lengde på 12 m (normalt papirplanet). Beregn moment- og skjærkraftfordelingen for demningskonstruksjonen, og bruk Matlab til å plote tilhørende diagrammer. Vannets massetetthet kan settes til 1000 kg/m^3 .



Figur 8: Demning.

Oppgave 8

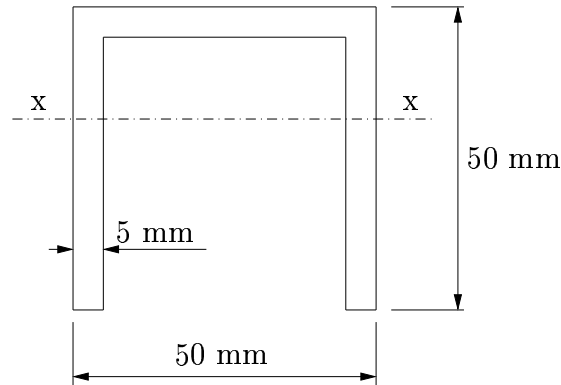
En fritt opplagt bjelke med tverrsnitt $b \times h = 50 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ er belastet som vist i figur 9. Bestem fordelingen av aksialspenninger over tverrsnittet ved bjelkens midtpunkt. Bruk Matlab til å plote spenningsfordelingen. Hvilken eksentrisitet (avstand fra bjelkeaksen) må de horisontale lastene ha for at bjelken ikke skal få noen trykkspenninger i overkant av tverrsnittet?



Figur 9: Fritt opplagt bjelke utsatt for tverrlaster og eksentrisk aksiallast i hver ende.

Oppgave 9

En bjelke med kanaltverrsnitt er 50 mm bred og 50 mm høy og har en veggtykkelse på 5 mm, se figur 10. Bjelken er fritt opplagt på et horisontalt underlag, og den er 1 m lang. Den er belastet med en jevnt fordelt last på 50 kN/m over hele lengden og en punktlast på 50 kN på midten. Disse lastene virker nedover mot underlaget (vertikalt). Bjelken bøyes om nøytralaksen $x - x$, se figur 10. Beregn skjærspenningsforløpet over tverrsnittet 0.25 m fra et av opplagene, og benytt Matlab til å plote forløpet. Indiker karakteristiske verdier (gjerne for hånd).

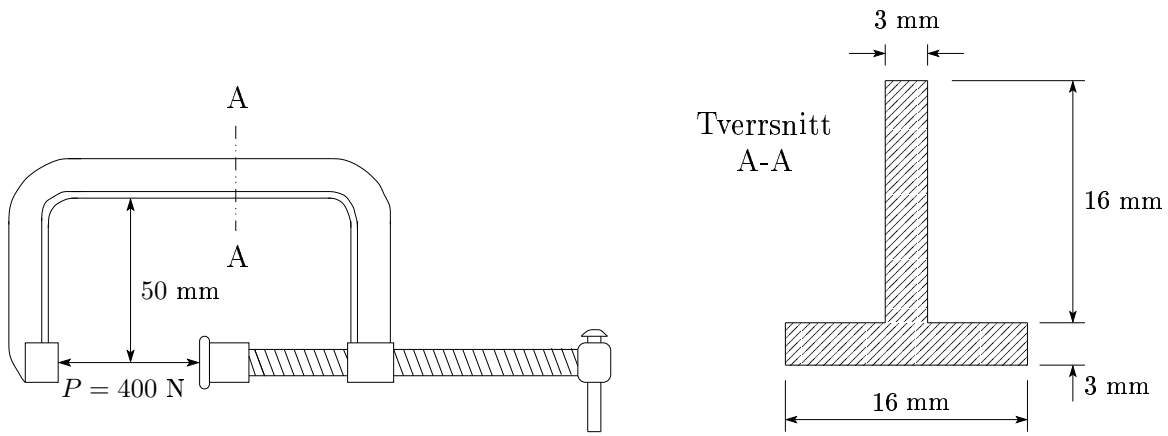


Figur 10: Kanaltverrsnitt.

Oppgave 10

Figur 11 viser en klemme som skrues til opp til en kraft P . I snitt A-A er tverrsnittets dimensjoner som vist.

- For det viste tverrsnitt skal arealsenter og arealtreghetsmomenter beregnes. Definer benyttet koordinatsystem (i tverrsnittsfigur).
- Beregn normalspenningfordelingen over tverrsnittet A-A og plott fordelingen i Matlab.
- Oppgave a) og b) skal nå gjennomføres for en skrutvinge med et kvadratisk tverrsnitt som har samme tverrsnittsareale som T-tverrsnittet. Sammenlign svarene.

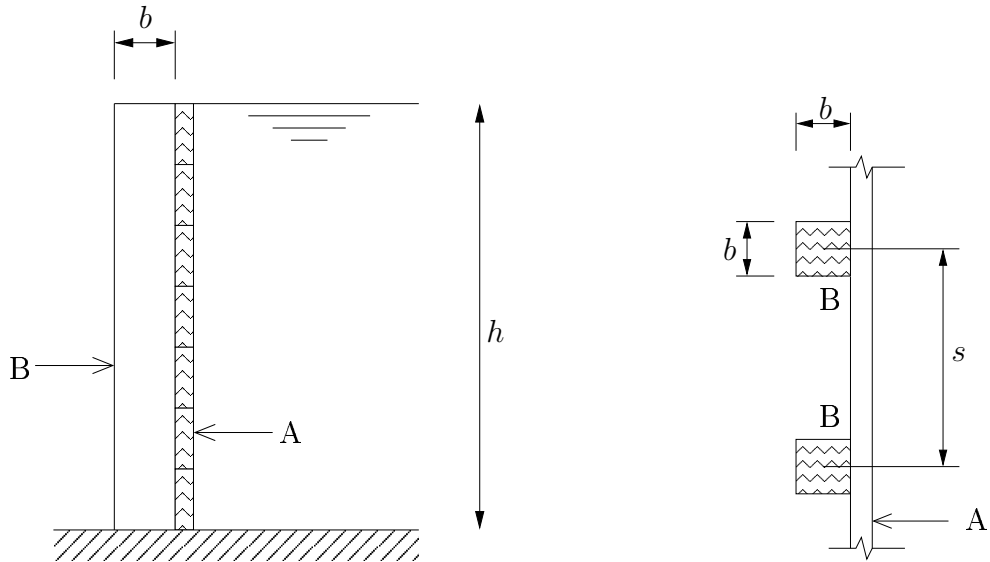


Figur 11: Skrutvinge.

Oppgave 11

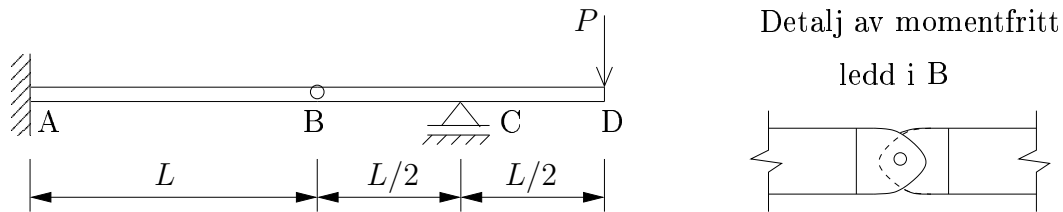
En midlertidig dam er bygget opp av horisontale og vertikale planker av tre, henholdsvis A og B i figur 12. De vertikale plankene (B) er slått ned i grunnen, har kvadratisk tverrsnitt ($b \times b$) og står med en avstand s fra hverandre.

Beregn nødvendig dimensjon b for vertikalplankene dersom $s = 0.8$ m, $h = 2$ m og maksimalt tillatt bøyepening er $\sigma_{maks} = 8$ MPa (tre). Benytt $\rho = 1000$ kg/m³ for massetettheten til vann.



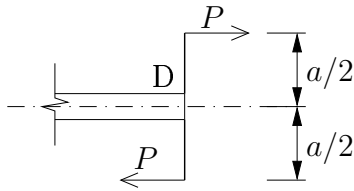
Figur 12: Demning av tre.

Oppgave 12



Figur 13: Bjelke med momentfritt ledd.

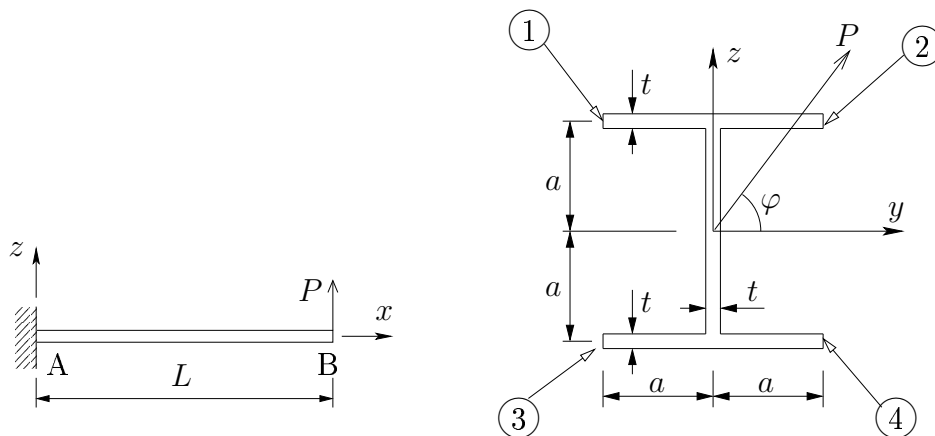
- Beregn opplagerkrefter, skjærkrefter (Q) og momenter (M), og tegn opp skjærkraft- og momentdiagram for bjelken i figur 13. Angi verdier i diagrammenes knekkpunkter samt retning på snittkreftene.
- Gjenta oppgaven, men nå med et ytre moment $M_D = Pa$ ved den frie enden (pkt. D), se figur 14.



Figur 14: Bjelken er nå påført et moment $M_D = Pa$ i D.

Oppgave 13

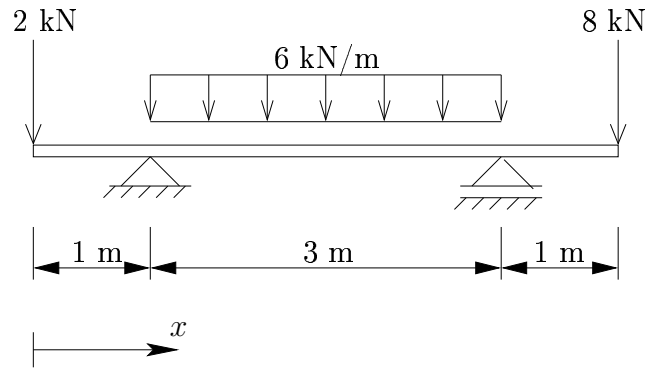
- Utkragerbjelken i figur 15 er påkjent av en skrålast P ved B. Bjelkens tverrsnitt er som vist i figuren. For $\varphi = 45^\circ$, beregn normalspenningene (σ_x) i tverrsnittspunktene 1, 2, 3 og 4 for innspenningstverrsnittet og skissér (i diagramform) spenningsfordelingen over tverrsnittet. NB! Det kan antas at $a \gg t$ (\rightarrow gir f.eks. $I_z = 4a^3t/3$).
- Beregn skjærspenningsfordelingen over innspenningstverrsnittet til bjelken i a) for $\varphi = 90^\circ$.



Figur 15: Utkragerbjelke med I-tverrsnitt.

Oppgave 14

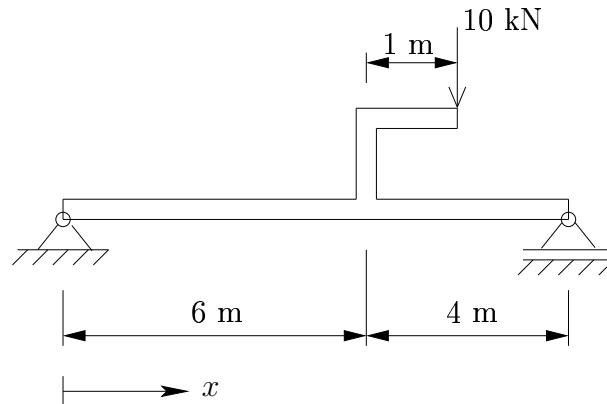
En bjelke er utsatt for lasten vist i figur 16. Bjelkens bøyestivhet er $EI = 1 \text{ MNm}^2$. Beregn bjelkens nedbøyning som en funksjon av x og plott grafen ved hjelp av Matlab.



Figur 16: Fritt opplagt bjelke.

Oppgave 15

En 10 m lang fritt opplagt bjelke bærer lasten vist i figur 17. Bjelkens bøyestivhet er $EI = 100 \text{ MNm}^2$. Beregn bjelkens nedbøyning som funksjon av x og plott denne ved hjelp av Matlab. Finn også tverrsnittet (x -koordinaten) som får den største nedbøyningen.

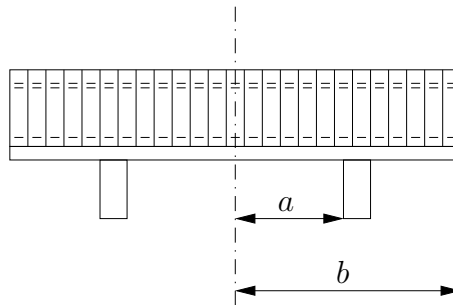


Figur 17: Fritt opplagt bjelke.

Oppgave 16

En hylle skal bæres av to støtter plassert symmetrisk om hyllas midtpunkt, se figur 18. Hylla er lineært elastisk med bøyestivhet EI .

- Finne uttrykk for momentet ved hyllas midtpunkt og støtter som funksjon av forholdet a/b (anta at b er konstant). Anta fornuftige verdier for lasten på hylla og b , og plott momentene ved hjelp av Matlab. Hvor må støttene stå for at det maksimale momentet skal være minst mulig?
- Bestem nedbøyningen ved hyllas midtpunkt og ender som funksjon av a/b (anta at b er konstant). Anta nå også en verdi for EI , og plott nedbøyningene ved hjelp av Matlab. Hvor må støttene stå for at den maksimale nedbøyningen skal være minst mulig?



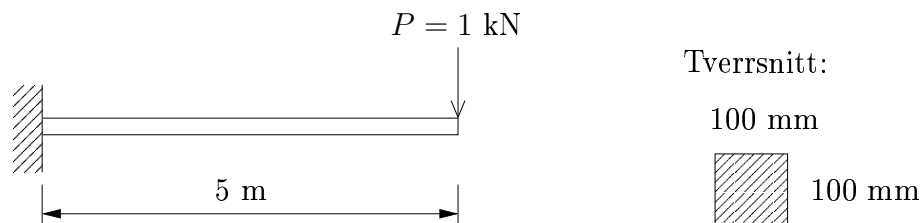
Figur 18: Hylla står på understøttelser plassert symmetrisk om hyllas midtpunkt.

Oppgave 17

I denne oppgaven skal vi undersøke betydningen av skjærdeformasjon for bjelken i figur 19. Bjelken har kvadratisk tverrsnitt $b \times h = 100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ og er av stål med $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$ og $\nu = 0.25$.

- Beregn nedbøyningen på grunn av bøyning som funksjon av x .
- Gjør tilsvarende for forskyvningen på grunn av skjærkrefter.
- Bruk Matlab til å plote funksjonene i a) og b) og sammenlign.

- d) Gjør oppgavene a) - c) når punktlasten P erstattes med en jevnt fordelt last $q = 0.2 \text{ kN/m}$ ($= P/5\text{m}$).



Figur 19: Utkragerbjelke med kvadratisk tverrsnitt.

Oppgave 18

Som oppgave 18, men nå er bjelken fritt opplagt, og punktlasten er plassert på midten.

Oppgave 19

I denne oppgaven skal vi utføre nedbøyningsberegninger ved hjelp av *differansemetoden*, som er en numerisk metode for å løse differensialligninger.

Som kjent kan nedbøyningen til en bjelke (på grunn av bøyning) finnes ved å løse differensialligningen

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}.$$

Tanken bak differansemetoden er å omforme differensialligningen til et sett lineære algebraiske ligninger, som er enkle å løse. For bjelkene vi skal studere i denne oppgaven, er differensialligningen rimelig enkel å løse, så fordelene med å bruke differansemetoden er ikke så stor. Oppgavens intensjon er imidlertid å illustrere hvordan metoden fungerer. Ved andre og mer kompliserte problemer er metoden mer verdifull.

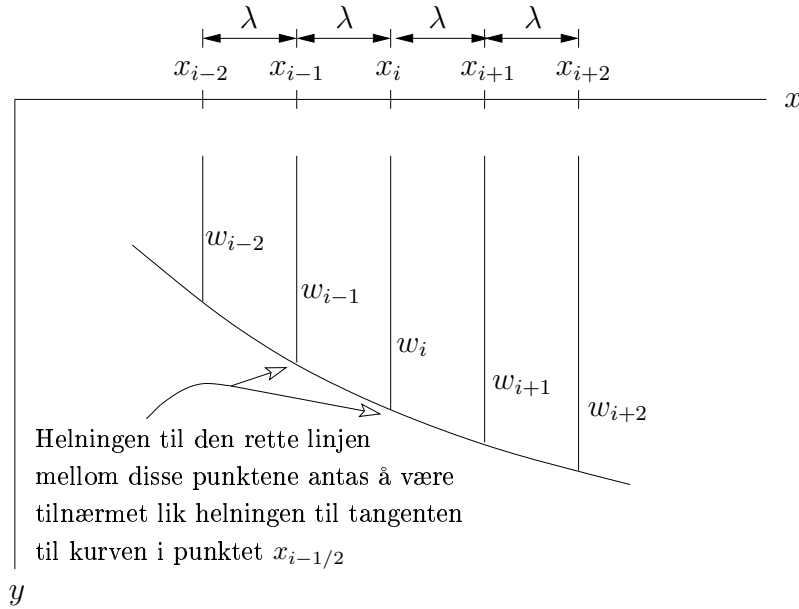
Prinsippet bak metoden er illustrert i figur 20, hvor x -aksen er delt opp i n intervaller med samme lengde $\lambda = L/n$. Funksjonsverdien til $w(x)$ i punktene x_{i-1} , x_i og x_{i+1} er henholdsvis $w(x_{i-1})$, $w(x_i)$ og $w(x_{i+1})$. For enkelthets skyld

vil disse verdiene skrives w_{i-1} , w_i og w_{i+1} . Den deriverte til funksjonen i punktet $w_{i-1/2}$ kan tilnærmes ved funksjonsverdien i punktene x_{i-1} og x_i på følgende måte

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{i-1/2} \cong \frac{1}{\lambda}(w_i - w_{i-1}). \quad (2)$$

På samme måte kan vi finne en tilnærming for den deriverte i punktet $x_{i+1/2}$:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{i+1/2} \cong \frac{1}{\lambda}(w_{i+1} - w_i). \quad (3)$$



Figur 20: Grafen til funksjonen $w(x)$.

Den andrederiverte i punktet x_i kan uttrykkes ved den førstederiverte i punktene $x_{i-1/2}$ og $x_{i+1/2}$:

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_i \cong \frac{1}{\lambda} \left[\left(\frac{dw}{dx}\right)_{i+1/2} - \left(\frac{dw}{dx}\right)_{i-1/2} \right]. \quad (4)$$

Innsetting av (2) og (3) i (4) gir

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_i \cong \frac{1}{\lambda^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}). \quad (5)$$

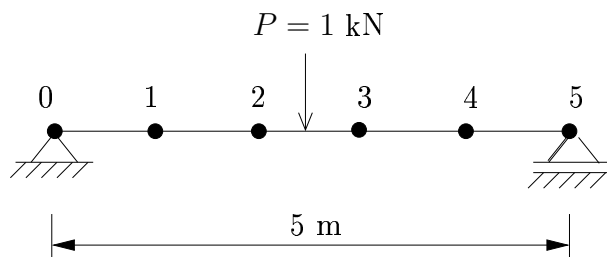
Dersom vi også deler opp momentet på tilsvarende måte, kan vi skrive

$$(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) \cong -\lambda^2 \frac{M_i}{EI}. \quad (6)$$

Deloppgave 1

I denne deloppgaven skal vi benytte differansemetoden til å beregne nedbøyningen til bjelken vist i figur 21. Punktene hvor nedbøyningen skal evalueres er indikert på figuren. Bjelkens tverrsnitt er kvadratisk med sidekanter på 100 mm og har en elastisitetsmodul på $E = 210\,000\text{N/mm}^2$.

- Benytt (6) til å stille opp ligninger for forskyvningen i punktene 1-4. Løs ligningene ved hjelp av Matlab og sammenlign svaret med eksakt løsning.
- Finn nedbøyningen dersom punktlasten P erstattes med en jevnt fordelt last $q = 0.2\text{ kN/m}$ ($= P/5\text{m}$). Sammenlign svaret med eksakt løsning.

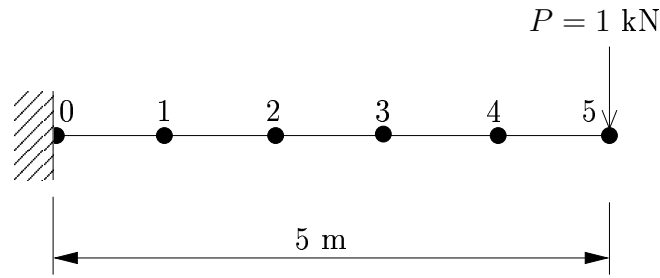


Figur 21: Differansemetoden benyttet på en fritt opplagt bjelke.

Deloppgave 2

I denne oppgaven skal differansemetoden benyttes på den utkragede bjelken vist i figur 22. Bjelkens tverrsnittsdimensjoner og materialegenskaper er som i deloppgave 1.

- I deloppgave 1 slapp vi unna med å løse fire ligninger med fire ukjente. Stiller vi opp ligninger kun i punktene 1-4 for denne bjelken, ender vi opp med fire ligninger og fem ukjente. Forklar hvordan vi kan finne den siste nødvendige ligningen ved å evaluere punktet 0.
- Løs ligningssettet og sammenlign løsningen med oppgave 18.
- Finn nedbøyningen dersom lasten P erstattes med en jevnt fordelt last $q = 0.2\text{ kN/m}$ ($= P/5\text{m}$). Sammenlign svaret med oppgave 18.

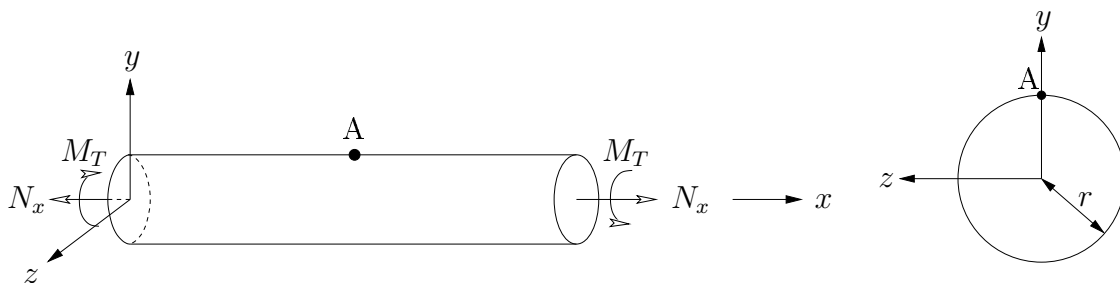


Figur 22: Differansemetoden benyttet på en utkraget bjelke.

Oppgave 20

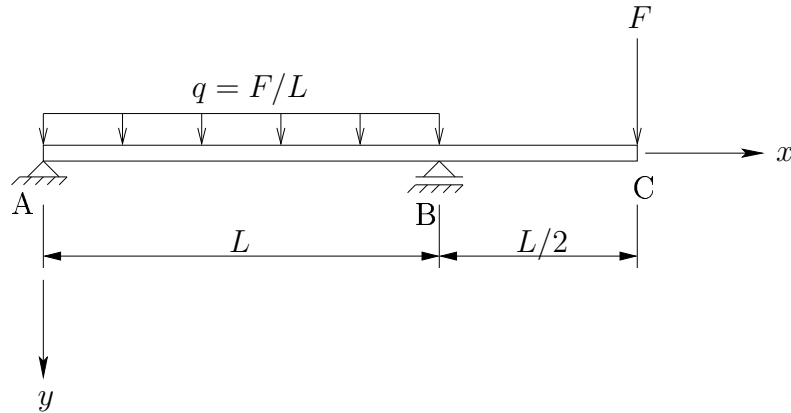
En massiv stav med sirkulært tverrsnitt er belastet med torsjonsmomentet M_T og aksialkraften N_x , se figur 23. Staven har en tverrsnittsradius på $r = 65$ mm.

- Bestem koordinatspanningene (aksesspenningene) ved punkt A når $N_x = 250$ kN og $M_T = 20$ kNm.
- Bestem hovedspenningene (prinsipalspenningene) ved A og tilhørende retninger. Tegn opp et element som er orientert etter hovedspenningsretningene, og sett på spenninger.
- Bruk Matlab til å plote Mohrs spennings sirkler for planene 12, 13 og 23, der 1, 2 og 3 er hovedspenningsretningene.
- Benytt Trescas flytekriterium til å bestemme om flyt vil opptre noe sted i staven når flytespenningen er gitt ved $f_y = 100$ N/mm².



Figur 23: Sirkulær stav.

Oppgave 21



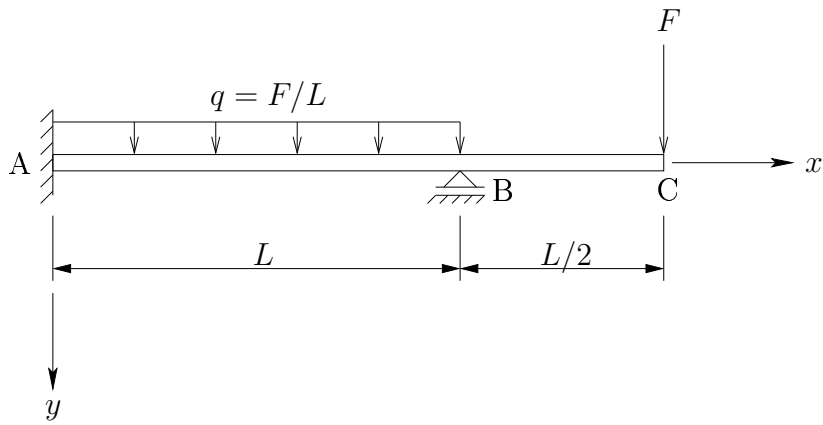
Figur 24: Bjelke ABC.

Figur 24 viser en bjelke ABC med lengde $3L/2 = 7.5$ m som er påvirket av en vertikal punktlast $F = 1.5$ kN i C. I tillegg virker en kontinuerlig fordelt last (pr. lengdeenhet) $q = F/L$ i området mellom A og B. Bjelken har kvadratisk tverrsnitt med bredde og høyde $b = h = 40$ mm, og den er av stål med elastisitetsmodul $E = 210\,000$ N/mm².

- Beregn aksialkrefter (N), skjærkrefter (Q) og bøyemomenter (M) i bjelken ABC. Tegn opp tilhørende snittkraft- og momentdiagram med angivelse av retninger samt verdier i diagrammenes knekkpunkter.
- Bestem uttrykket for bøyelinjen (nedbøyningen) til bjelken. Skjærdeformasjoner skal ikke tas med i beregningene.
- Bestem normalspenningen (σ_x) og skjærspenningen (τ_{xy}) som funksjoner av x og y , og benytt Matlab til å plote spenningene (fargeplott over bjelkens utstrekning i xy -planet).
- Bestem spenningen som inngår i Trescas flytekriterium som funksjon av x og y , og plott denne ved hjelp av Matlab.

Vi antar nå at bjelken er laget av stål som opp til flytespenningen gitt ved $f_y = 350$ MPa (flytespenningen betegnes også ofte med σ_Y) oppfører seg lineært elastisk.

- Vil flyt opptre noe sted i bjelken (eventuelt hvor)?



Figur 25: Bortsett fra innspenningen i A er bjelken identisk med den vist i figur 24.

Figur 25 viser en bjelke som er fast innspenning ved A. For øvrig er den identisk med bjelken i figur 24.

- f) Bestem bøyemomentet som blir overført fra veggen på bjelken i A. Benytt gjerne resultater utledet tidligere.