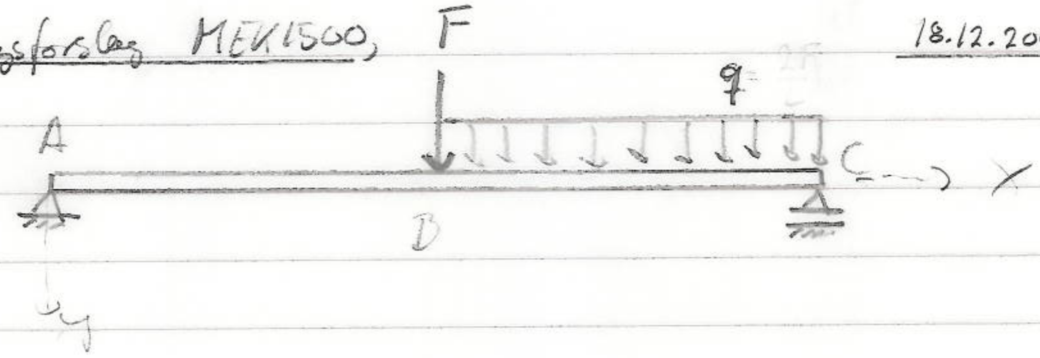
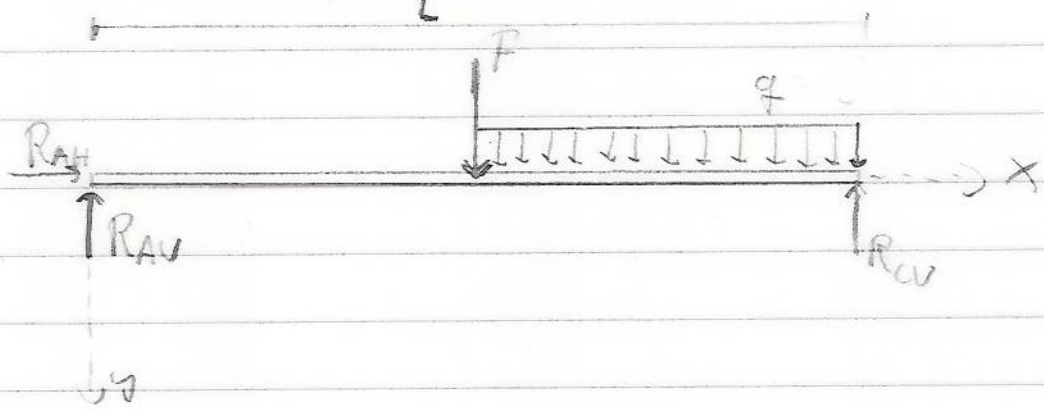
Løsningsforslag MEK1500, 18.12.2006

1.



a) Bestem opplagerkrefter



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{R_{AH} = 0}} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F + q \cdot \frac{L}{2} - R_{AV} - R_{CV} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{R_{AV} = F + q\frac{L}{2} - R_{CV}} \qquad (2)$$

$$\sum M_{\text{m.h.p. } A} = 0 \Rightarrow F \cdot \frac{L}{2} + q\frac{L}{2} \cdot \frac{3L}{4} - R_{CV} \cdot L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$R_{CV} = \underline{\underline{\frac{F}{2} + \frac{3}{8}qL}} \qquad (3)$$

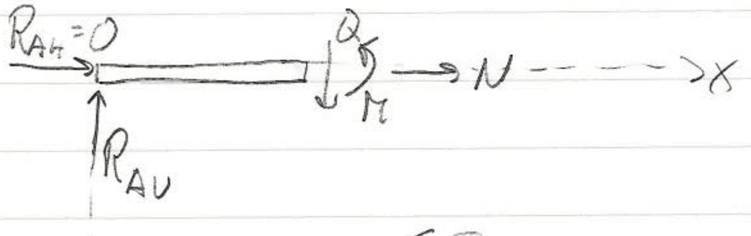
Innsatt i (2) gir dette:

$$R_{AV} = F + q\frac{L}{2} - \frac{F}{2} - \frac{3}{8}qL = \underline{\underline{\frac{F}{2} + \frac{qL}{8}}} \qquad (4)$$

b) Beregn snittkrefter og tegn diagram.

Aksialkrefter, N

Likevekt av en del av bjelken:



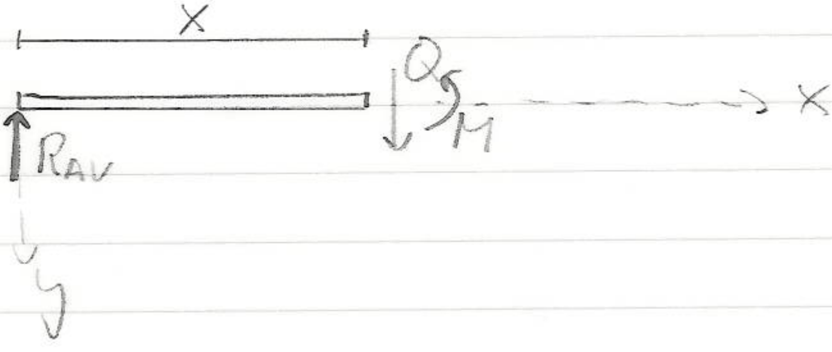
$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{N = 0}}$ (5) for alle snitt (alle

Skjærkrefter, Q, og bøyemomenter, M.

Vi tar for oss $x \in [0, \frac{L}{2})$ og $x \in (\frac{L}{2}, L]$ hver for seg.

- $x \in [0, \frac{L}{2})$

Ser på likevekt av den delen av bjelken som er til venstre for et tenkt snitt ved x.

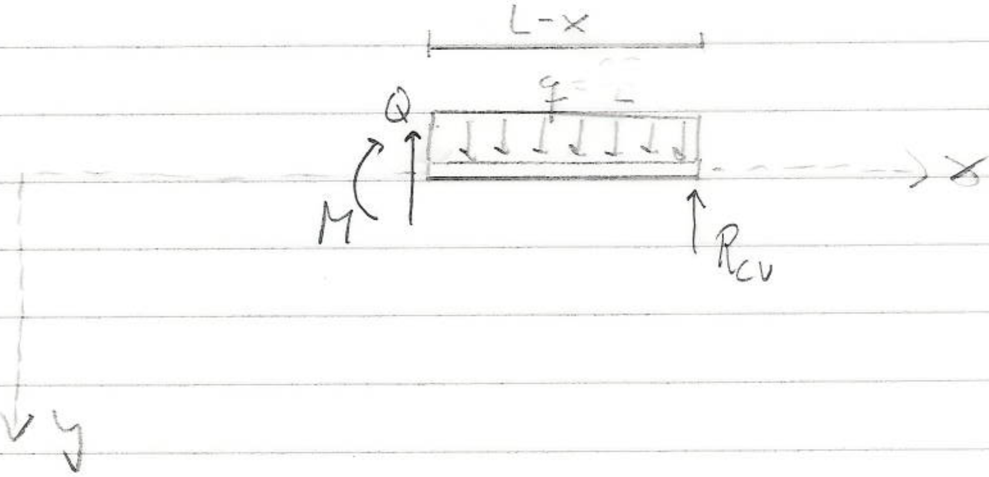


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad Q - R_{AV} = 0 \Rightarrow \quad Q = R_{AV} = \frac{F}{2} + \frac{qL}{8} \qquad (6)$$

$$\sum M_{mhp\,x} = 0 \Rightarrow \quad M - R_{AV}\,x = 0 \Rightarrow M = R_{AV}\,x = \left(\frac{F}{2} + \frac{qL}{8}\right)x \quad (7)$$

- $x \in \left(\frac{L}{2}, L\right]$

Ser på likevekt av den delen av bjelken som ligger til høyre for et tenkt snitt ved x.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \qquad q(L-x) - Q - R_{CV} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Q = q(L-x) - R_{CV}$$

$$= -qx + \frac{5}{8}qL - \frac{F}{2} \qquad (8)$$

$$\sum M_{mhp\,x} = 0 \Rightarrow \quad -M + R_{CV}(L-x) - q\cdot(L-x)\cdot\frac{(L-x)}{2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$M = \left(\frac{F}{2} + \frac{3qL}{8}\right)(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)(L-x)$$

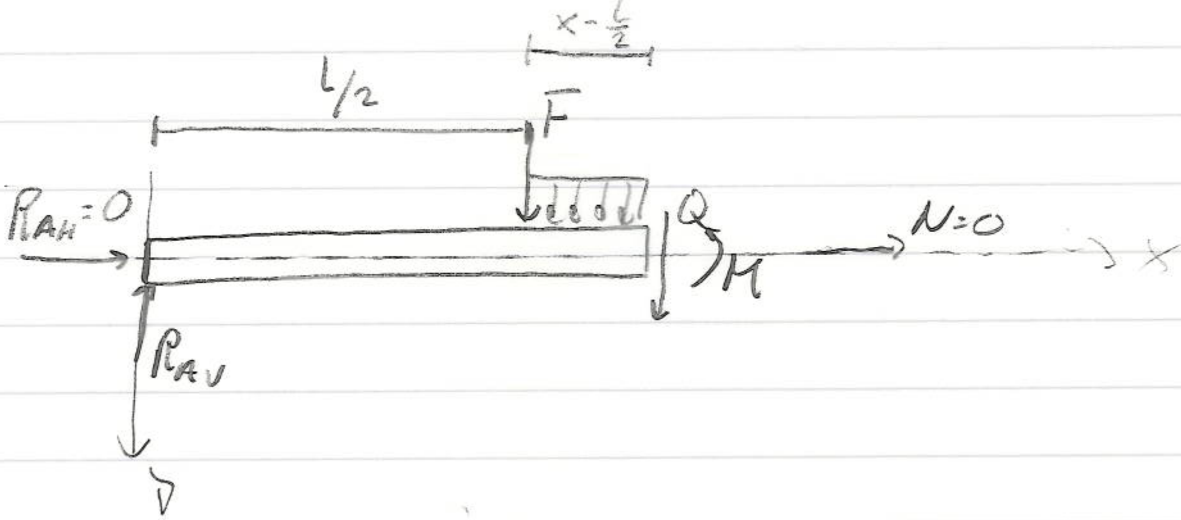
$$= (L-x)\left(\frac{F}{2} + \frac{3}{8}qL - \frac{4}{8}qL + \frac{q}{2}x\right) = (L-x)\left(\frac{q}{2}x + \frac{F}{2} - \frac{qL}{8}\right)$$

(9)

Alternativ utledning av 1 b)

- $x \in [\frac{L}{2}, L)$

Likevekt av den delen av bjelken som er til venstre for et snitt.



$$\sum F_y = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{F}{2} - \frac{qL}{8} + F + q(x-L) + Q = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{Q = \frac{F}{2} + \frac{qL}{8} - F[x-\frac{L}{2}]^0 - q[x-\frac{L}{2}]^1}}$$

$$\sum M_{\text{rundt } x} = 0 \Rightarrow \frac{F}{2}x + \frac{qL}{8}x - F(x-\frac{L}{2}) - q(x-\frac{L}{2})\frac{1}{2}(x-\frac{L}{2}) - M =$$

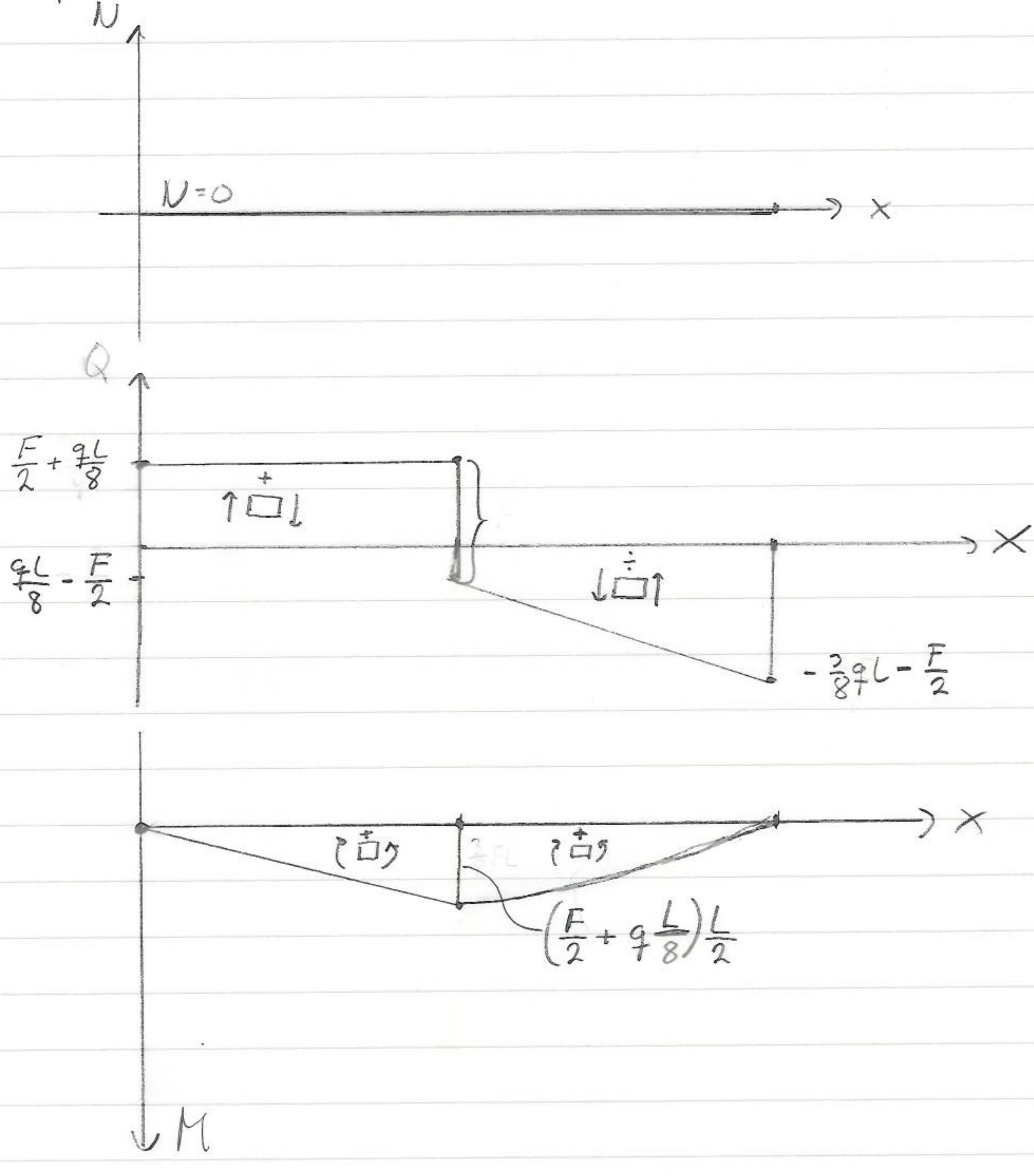
$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{M = \frac{F}{2}x + \frac{qL}{8}x - F[x-\frac{L}{2}]^1 - \frac{q}{2}[x-\frac{L}{2}]^2}}$$

Konklusjon:

N er gitt ved (5)
Q er gitt ved (6) og (8)
M er gitt ved (7) og (9)

Diagram



c) Skal beregne nedbøyningen i B, dvs ved $x = \frac{L}{2}$, der kraften F virker.

Benytter Castiglianos sats:

$$\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F}\int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\cdot\frac{\partial M}{\partial F}\,dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{ \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{F}{2} + \frac{qL}{8}\right)x \cdot \frac{x}{2}\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} (L-x)\left(\frac{q}{2}x + \frac{F}{2} - \frac{qL}{8}\right)\right.$$

$$\left. \cdot (L-x)\cdot\frac{1}{2}\,dx \right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{ \left(\frac{F}{2} + \frac{qL}{8}\right)\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\frac{L}{2}} + \int_{\frac{L}{2}}^{L} (L^2 - 2Lx + x^2)\left(\frac{qx}{4} + \frac{F}{4} - \frac{qL}{16}\right)dx \right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{ \left(\frac{F}{2} + \frac{qL}{8}\right)\frac{L^3}{48} + \int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(\frac{qL^2}{4}x + \frac{FL^2}{4} - \frac{qL^3}{16}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{qL}{2}x^2 - \frac{FL}{2}x + \frac{qL^2}{8}x + \frac{q}{4}x^3 + \frac{F}{4}x^2 - \frac{qL}{16}x^2\right)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{ \left(\frac{F}{2} + \frac{qL}{8}\right)\frac{L^3}{48} + \left[\frac{qL^2}{8}x^2 + \frac{FL^2}{4}x - \frac{qL^3}{16}x\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{qL}{6}x^3 - \frac{FL}{4}x^2 + \frac{qL^2}{16}x^2 + \frac{q}{16}x^4 + \frac{F}{12}x^3 - \frac{qL}{48}x^3\right]_{\frac{L}{2}}^{L}\right.$$

$$\frac{1}{EI}\left\{ \frac{FL^3}{96} + \frac{qL^4}{384} + \frac{3}{32}qL^4 + \frac{FL^3}{8} \right.$$

$$- \frac{qL^4}{32} - \frac{7qL^4}{48} - \frac{3FL^3}{16} + \frac{3qL^4}{64} + \frac{15qL^4}{256}$$

$$\left. + \frac{7FL^3}{96} - \frac{7qL^4}{384} \right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{ FL^3\left(\frac{1+12-18+7}{96}\right) + qL^4\left(\frac{2+72-24-112+36+45-1}{768}\right.\right.$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{FL^3}{48} + \frac{5qL^4}{768}\right)$$

d) Setter $q = \frac{2F}{L}$

Vi skal skissere skjærspenningen τ_{xy} ved $\underline{x = \frac{L}{4}}$

Skjærspenningen er gitt ved

$$\tau_{xy} = \frac{QS}{Ib}.$$

For bjelker med rektangulært tverrsnitt vet vi at skjærspenningen over tverrsnittet går som en parabel med maks.verdi midt på tverrsnittshøyden (verdien er her gitt ved $1.5\frac{Q}{bh}$) og null øverst og nederst.

Setter $q = \frac{2F}{L}$ inn i (6) og evaluerer Q i $x = \frac{L}{4}$.

Vi får da:

$$Q\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{F}{2} + \frac{2F}{\cancel{L}} \cdot \frac{\cancel{L}}{8} = \frac{2F}{4} + \frac{F}{4} = \underline{\frac{3F}{4}}$$

Skjærspenningen ved $x = \frac{L}{4}$ blir dermed:

$$\tau_{xy,maks} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{3F}{4}}{b \cdot h} = \underline{\frac{9F}{8bh}}$$

Mulig maks abs.verdi av skjærkraft for $x \to L$.
Fra (8) får vi at

$$Q(x=L, \text{innsatt } q=\tfrac{2F}{L}) = -\frac{2F}{L}\cdot L + \frac{5}{8}\cdot\frac{2F}{L}\cdot L - \frac{F}{2}$$

$$= -2F + \frac{5}{4}F - \frac{2}{4}F = \underline{\underline{-\frac{5}{4}F}}$$

$\Rightarrow$ Maks abs.verdi av τ_{xy} er gitt ved:

$$|\tau_{xy,maks}| = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}F}{bh} = \underline{\underline{\frac{15}{8}\frac{F}{bh}}}$$

Denne opptrer for $x = L$, og midt i tverrsnittshøyden.

Aksialspenningen σ_x er gitt ved:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}y$$

Her er $N=0 \Rightarrow \sigma_{x,maks}$ opptrer i tverrsnittet der momentet oppnår sin maksimale verdi.

Fra (7):

$$M(x=\tfrac{L}{2}, \text{innsatt } q=\tfrac{2F}{L}) = \left(\frac{F}{2} + \frac{2F}{L}\cdot\frac{L}{8}\right)\frac{L}{2} = \left(\frac{F}{2}+\frac{F}{4}\right)\cdot\frac{L}{2} = \underline{\underline{\frac{3FL}{8}}}$$

M er kontinuerlig for $x=\frac{L}{2}$, men skifter fortegn til den deriverte av M (gitt ved 9) evaluert i $x=\frac{L}{2}$ og innsatt $q=\frac{2F}{L}$.

Fra (9):

$$M(\text{innenfor } q = \tfrac{2F}{L}) = (L-x)\cdot\left(\frac{2F}{L\cdot 2}\cdot x + \frac{F}{2} - \frac{2F}{L}\cdot\frac{L}{8}\right)$$

$$= (L-x)\left(\frac{F}{L}\cdot x + \frac{F}{2} - \frac{F}{4}\right)$$

$$= (L-x)\left(\frac{F}{L}x + \frac{F}{4}\right) = \frac{F}{L}(L-x)\left(x+\frac{L}{4}\right)$$

$$\frac{dM}{dx}\left(x=\frac{L}{2}\right) = \frac{F}{L}\left[-\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{4}\right)+\left(L-\frac{L}{2}\right)\right] = \frac{F}{L}\left(-\frac{3L}{4}+\frac{2L}{4}\right)$$

$$= F\left(-\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right) = -\frac{F}{4} < 0 \quad (\text{forutsatt } F>0)$$

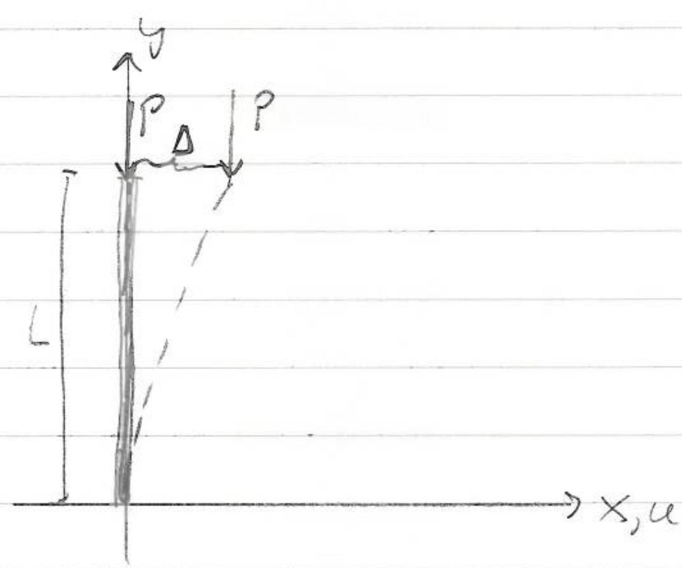
$\Rightarrow$ M_{maks} opptrer ved $x = \frac{L}{2}$.

$$\sigma_{x,maks} = \sigma_x\left(x=\frac{L}{2},\ y=\frac{h}{2}\right) = \frac{\frac{3FL}{8}}{\frac{1}{12}bh^3}\cdot\frac{h}{2} = \frac{\frac{3FL}{8}}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{18FL}{8bh^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{9FL}{4bh^2}}}$$

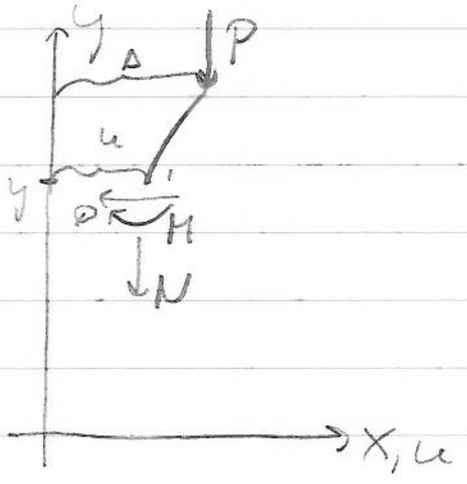
Oppg. 2

a)



Diff.likn: $\dfrac{d^2u}{dy^2} = -\dfrac{M}{EI}$ (1)

Setter opp uttrykk for M vha likevektsbetraktning for deformert geometri.



$\sum M_{\text{om pkt } y} = 0$

$\Downarrow$

$-M - P(\Delta - u) = 0$

$\Downarrow$

$M = -P\Delta + Pu$ (2)

(2) innsatt i (1) gir:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{P}{EI}\cdot\Delta - \frac{P}{EI}u$$

$\Downarrow$

$$\frac{d^2u}{dy^2} + k^2u = k^2\Delta \quad (3), \qquad \text{der } k^2 = \frac{P}{EI}$$

Dette er diff.likn.

Randbetingelser:

I : $u(0) = 0$

II : $\frac{du(0)}{dy} = 0$

III : $u(L) = \Delta$

b) Bestemmer kritiske last ved å løse randverdiproblemet.

Diff. likningen (3) er inhomogen

$\Downarrow$

Generell løsning: $u = u_h + u_p$,

der u_h er generell homogen løsning og u_p er en partikulærløsning.

Vi ser lett at

$$u_p = \Delta \quad (4)$$

er en mulig part. løsning.
Generell homogen løsning:

$$u_h = A\sin ky + B\cos ky \quad (5)$$

$\Downarrow$

Generell løsning:

$$u(y) = A\sin ky + B\cos ky + \Delta \quad (6)$$

Bestemmer koeffisienter og konstant ved å benytte randbetingelser.

(6) innsatt i II gir:

$$Ak\underbrace{\cos 0}_{=1} - Bk\underbrace{\sin 0}_{=0} = 0$$

$\Downarrow$

$$A = 0 \quad (7)$$

Fra I får vi nå:

$$B \cdot 1 + \Delta = 0$$

$\Downarrow$

$$B = -\Delta \quad (8)$$

Løsning til nå:

$$u(y) = -\Delta\cos ky + \Delta \quad (9)$$

Innsatt i III:

$$-\Delta\cos kL + \Delta = \Delta$$

$\Downarrow$

$$\cos kL = 0$$
$$\Downarrow$$
$$kL = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (10)$$

Den første knekklasten (dvs. kritiske last) får vi ved å velge $n = 0$ her.
Det gir:

$$k_{kr} \cdot L = \frac{\pi}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$k_{kr} = \frac{\pi}{2L}$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}} = \frac{\pi}{2L}$$
$$\Downarrow$$
$$P_{kr} = \frac{\pi^2}{(2L)^2} EI \qquad (11)$$

Tilhørende knekkform: