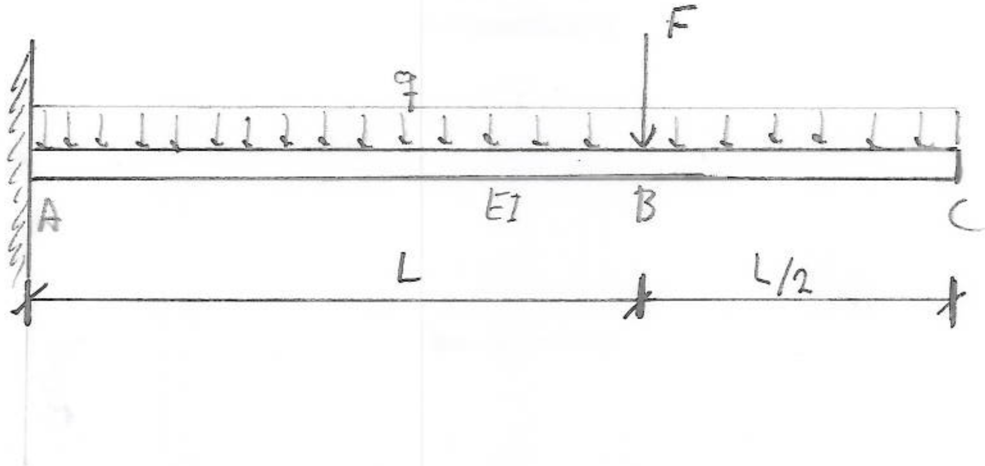
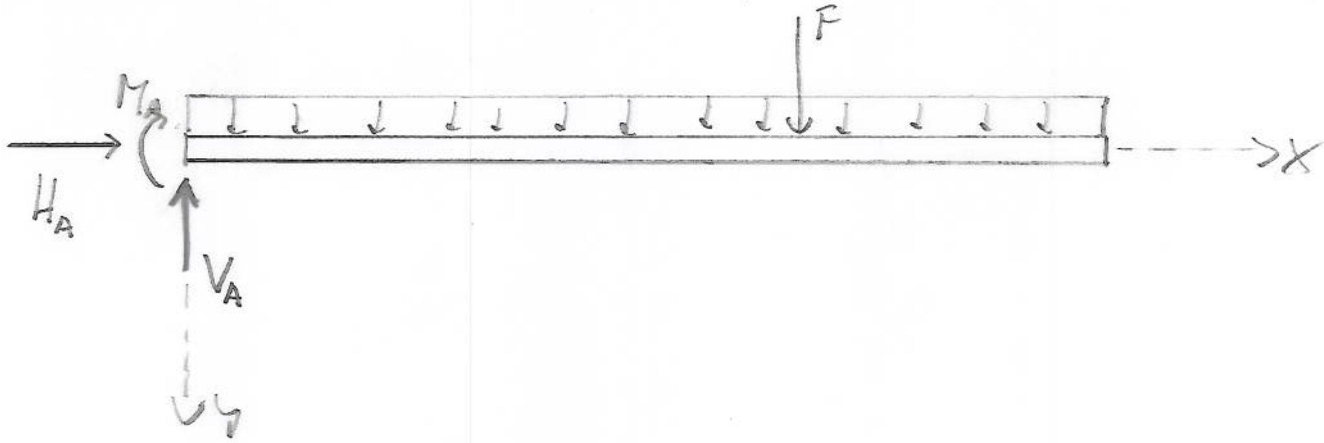
Opps. 1.



(a) Opplagerkrefter og -momenter som virker på bjelken.

Ser på likevekt av hele bjelken.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad \underline{\underline{H_A = 0}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad F + q \cdot \frac{3}{2}L - V_A = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{V_A = F + \frac{3}{2}qL}}$$

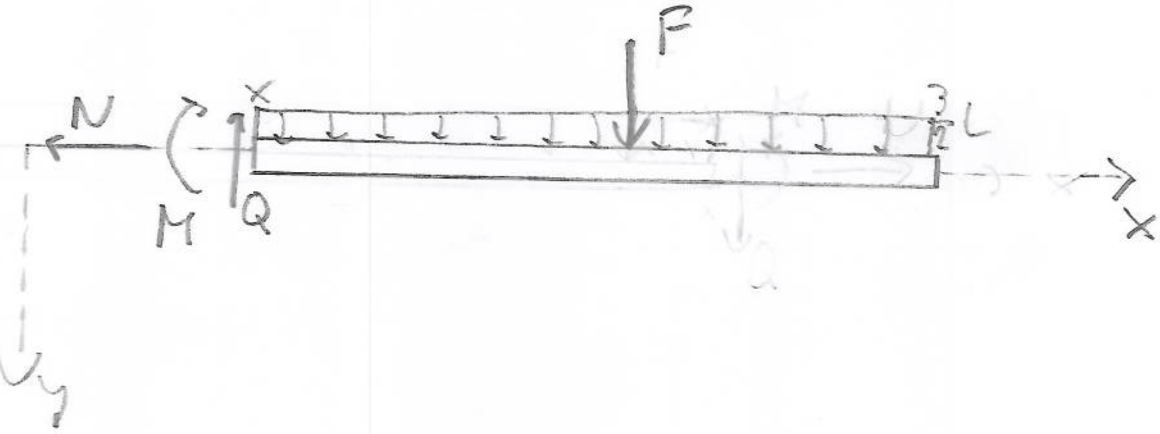
$$\sum M_{mhp\,A} = 0 \Rightarrow \quad -M_A - FL - q\,\frac{3}{2}L \cdot \frac{3}{4}L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{M_A = -FL - \frac{9}{8}qL^2}}$$

(b) Beregn snittkrefter.

Ser på likevekt av bjelkedel til høyre for (vilkårlig) snitt ved x. For $x \in [0, L)$ får vi da med et bidrag fra punktlasten F som ikke blir med for $x \in (L, \frac{3}{2}L]$ (gjelder Q og M). Ved å benytte Macaulay-funksjoner kan dette håndteres enkelt.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{N = 0}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad -Q(x) + q\left(\tfrac{3}{2}L - x\right) + F[L-x]^0 = 0$$

$$\Downarrow$$

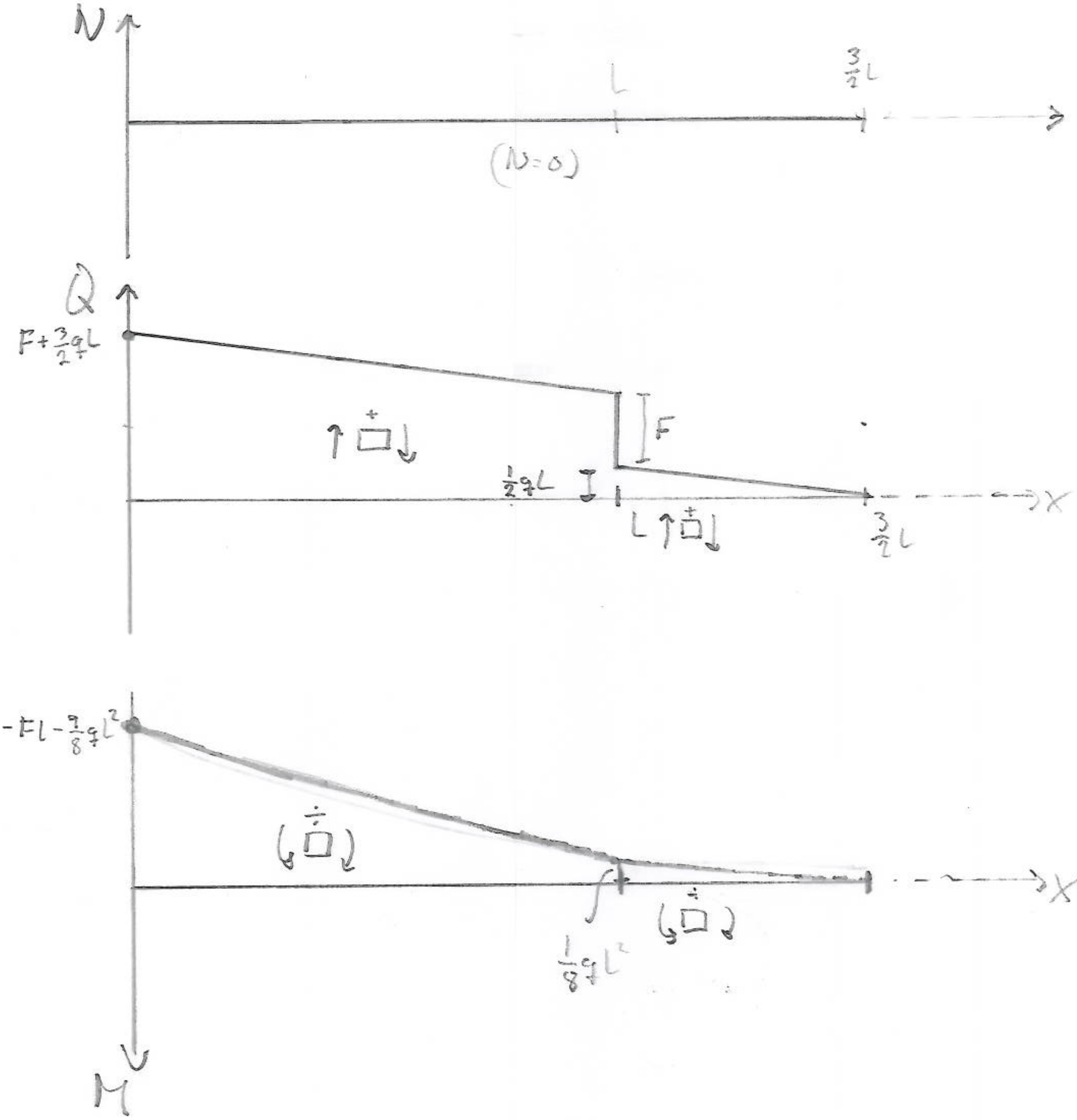
$$\underline{\underline{Q(x) = q\left(\tfrac{3}{2}L - x\right) + F[L-x]^0}}$$

$$\sum M_{\text{omkr. } x} = 0 \Rightarrow \quad -M(x) - \frac{q}{2}\left(\tfrac{3}{2}L - x\right)^2 - F[L-x]$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{M(x) = -\frac{q}{2}\left(\tfrac{3}{2}L - x\right)^2 - F[L-x]}}$$

Diagrammer.


N
L
$\frac{3}{2}L$
(N=0)
Q
$F+\frac{3}{2}qL$
F
$\frac{1}{2}qL$
L
$\frac{3}{2}L$
x
$-FL-\frac{9}{8}qL^2$
$\frac{1}{8}qL^2$
x
M

c) Bøyelinjen

Beskrives av differensialligning.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

og randbet.

I $v(0) = 0$

II $v'(0) = 0$

Vi setter uttrykket for momentet fra (6) inn i (1) og får:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q}{2EI}\left(\frac{3}{2}L - x\right)^2 + \frac{F}{EI}[L - x]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{q}{6EI}\left(\frac{3}{2}L - x\right)^3 - \frac{F}{2EI}[L - x]^2 + C_1 \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$v(x) = \frac{q}{24EI}\left(\frac{3}{2}L - x\right)^4 + \frac{F}{6EI}[L - x]^3 + C_1 x + C_2 \quad (3)$$

Fra II og (2) får vi:

$$\frac{dv(x=0)}{dx} = -\frac{q}{6EI}\left(\frac{3}{2}L\right)^3 - \frac{F}{2EI}L^2 + C_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$C_1 = \frac{FL^2}{2EI} + \frac{9qL^3}{16EI} \quad (4)$$

Fra I og (3) får vi nå:

$$v(0) = \frac{q}{24EI}\left(\frac{3}{2}L\right)^4 + \frac{F}{6EI}L^3 + C_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{C_2 = -\frac{FL^3}{6EI} - \frac{27\,qL^4}{128\,EI}}} \qquad (5)$$

<u>Løsn. er def. ved (3), (4) og (5)</u>

d) <u>Undersøkelse av flyt</u>

Normalspenning gitt ved: $\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}y$.

Her er $N=0$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y$$

Fra (b) vet vi at maks abs.verdi av M opptrer ved $x=0$.

$$M(0) = M_A = -FL - \frac{9}{8}qL^2$$

$$\sigma_{x,maks} = \sigma_x\left(x=0, y=-\frac{h}{2}\right) = -\frac{M(0)}{I}\cdot\frac{h}{2} = \frac{FL + \frac{9}{8}qL^2}{\frac{bh^3}{12}}\cdot\frac{h}{2}$$

$$= \frac{FL + \frac{9}{8}qL^2}{\frac{bh^2}{6}} = \underline{\frac{6FL + \frac{27}{4}qL^2}{bh^2}} \underset{\text{innsatt tall/verdier}}{=} \underline{351.9\text{ MPa}}$$

Her, dvs. ved $x=0$, $y=\pm\frac{h}{2}$, vet vi at $\sigma_y = 0$ og $\tau_{xy} = 0$.

Fra Mohrs spenn.sirkel får vi derfor at ~~vi her har~~

$$\tau_{maks} = \frac{\sigma_{x,maks}}{2} = \underline{175.9 \text{ MPa}}$$

Trescas kriterium: Flyt dersom $\tau_{maks} > \frac{f_Y}{2} = 175.0$ MPa.

$\Downarrow$

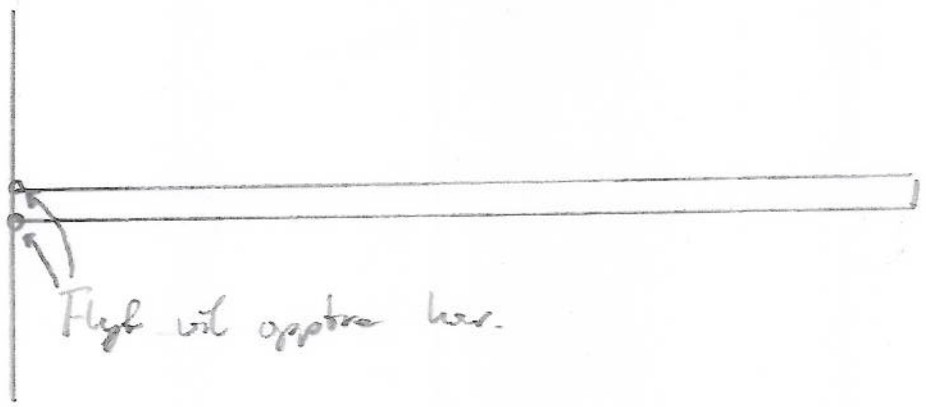
Flyt vil opptre her.

Undersøker midt i tverrsnittshøyden, $x=0$, $y=0$, fordi skjærspenningen har sin maksimalverdi her.
Her er $\sigma_x = \sigma_y = 0$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{Q(x=0)}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4\text{kN} + 4.05\text{kN}}{0.006 \text{ m}^2} = \underline{2.01 \text{ MPa}}$$

$\Downarrow$

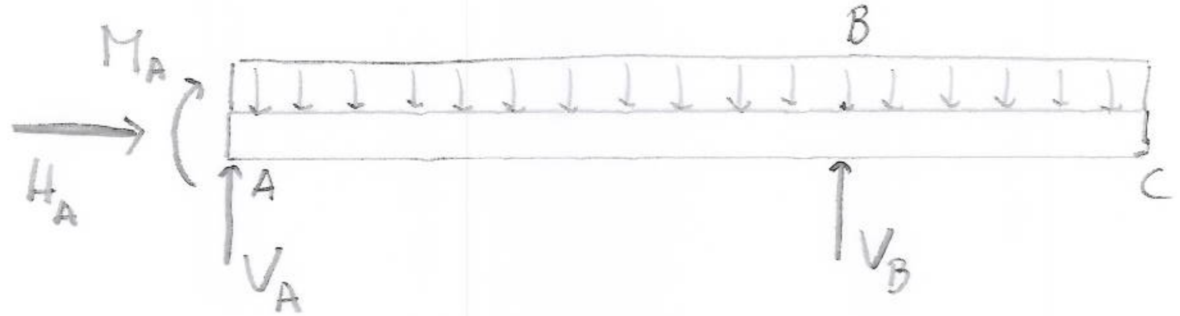
ikke flyt her.



Flyt vil opptre her.

e) Kraften F er nå erstattet av et (fritt) opplager. Det betyr at problemet nå er statisk ubestemt.

Bjelke med opplagerkrefter og andre ytre krefter.



Bortsett fra at den kjente kraften F nå er byttet ut med et opplager som gir en (foreløpig) ukjent kraft V_B (i motsatt retning) er problemet identisk med det vi studerte i (a) til (c). Det betyr at vi får bøyelinjen for denne bjelken ved å bytte ut F med $-V_B$ i uttrykket fra (c). Vi vet nå at $v(x=L)=0$, og dette kan benyttes til å bestemme V_B.

$$v(x=L) = \frac{q}{24EI}\left(\frac{L}{2}\right)^4 + 0 - \frac{V_B L^3}{2EI} + \frac{9qL^4}{16EI} + \frac{V_B L^3}{6EI} - \frac{27qL^4}{128EI} = 0$$

$$\Updownarrow$$

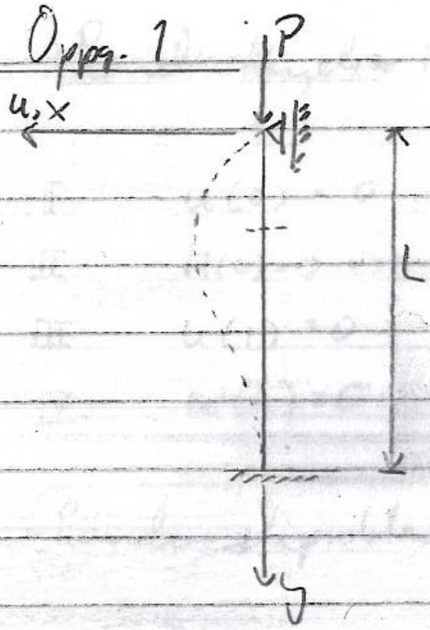
$$V_B\left(\frac{L^3}{6EI} - \frac{3L^3}{6EI}\right) + \frac{qL^4}{EI}\left(\frac{1}{384} + \frac{9}{16} - \frac{27}{128}\right) = 0$$

$$V_B\left(-\frac{L^3}{3EI}\right)+\frac{qL^4}{EI}\left(\frac{1+216-81}{384}\right)=0$$

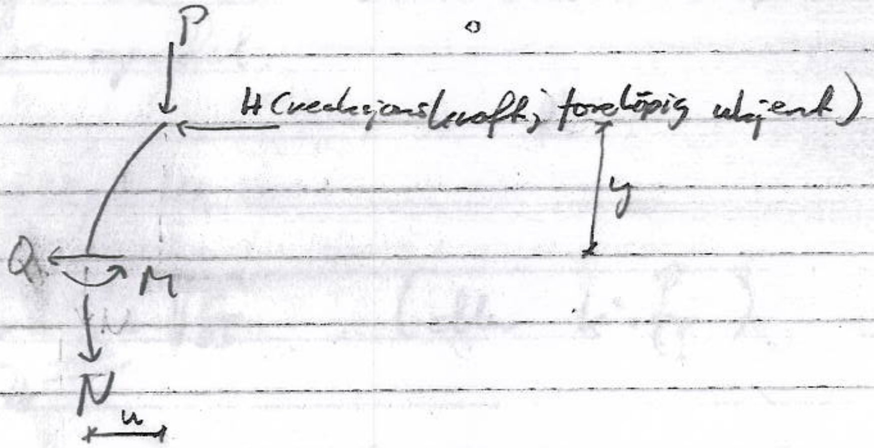
$$\Downarrow$$

$$V_B=\frac{qL^4}{\cancel{EI}}\frac{136}{384}\cdot\frac{3\cancel{EI}}{\cancel{L^3}}=qL\cdot\frac{136}{128}=\frac{17}{16}qL$$

Oppg. 1



a) Likevektsbetraktning av deformert del av søylen.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H + Q = 0 \Rightarrow \underline{Q = -H}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P + N = 0 \Rightarrow \underline{N = -P}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M + Hy - Pu = 0 \Rightarrow \underline{M = Pu - Hy}$$

Diff.likn. blir da: $u'' = -\frac{M}{EI}$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{u'' + \frac{Pu}{EI} = \frac{Hy}{EI}}} \qquad (1)$$

~~2-1999~~
10-2007

Randbetingelser:

I $\quad u(0) = 0$

II $\quad M(0) = 0 \Rightarrow u''(0) = 0$

III $\quad u(L) = 0$

IV $\quad u'(L) = 0$

(Randverdiproblemet består av diff.ligning og randbet.)

b) Løser randverdiproblemet.

Løsningen av (1) består av en part. del og en homogendel.

$$u = u_p + u_h$$

Innfører $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ (eller $k^2 = \frac{P}{EI}$)

$\Downarrow$

$$u_h = A \sin ky + B \cos ky$$

Forsøker med part.løsn. på form $u_p = Cy + D$

Innsatt i (1) gir dette:

$$\cancel{-Ak^2 \sin ky} \cancel{- Bk^2 \cos ky} + \cancel{k^2 A \sin ky} + \cancel{k^2 B \cos ky} + k^2 Cy + k^2 D = \frac{Hy}{EI}$$

$\Downarrow$

$D = 0$ og $C = \frac{H}{k^2 EI}$

Generell løsning blir da:

$$\underline{u = A\sin ky + B\cos ky + \frac{Hy}{k^2EI}} \qquad (2)$$

Bestemmer konstanter fra randbet.

I $\Rightarrow$ $\underline{B = 0}$ (3)

II er nå automatisk oppfylt.

III $\Rightarrow$ $A\sin kL + \frac{HL}{k^2EI} = 0$ (4)

IV $\Rightarrow$ $Ak\cos kL + \frac{H}{k^2EI} = 0$ (5)

Flytter andre ledd i (4) og (5) over på høyre side. Multipliserer deretter (4) med k og dividerer med (5)

$\Downarrow$

$$\tan kL = kL \qquad (6)$$

Minste pos. løsning er gitt ved:

$$kL = 4.49 \qquad (7)$$

$\Downarrow$

Knekklasten er gitt ved: $P_{kr} = k^2EI = \left(\frac{4.49}{L}\right)^2 EI = \underline{\underline{20.2\frac{EI}{L^2}}}$ (8)

Knekkeform: