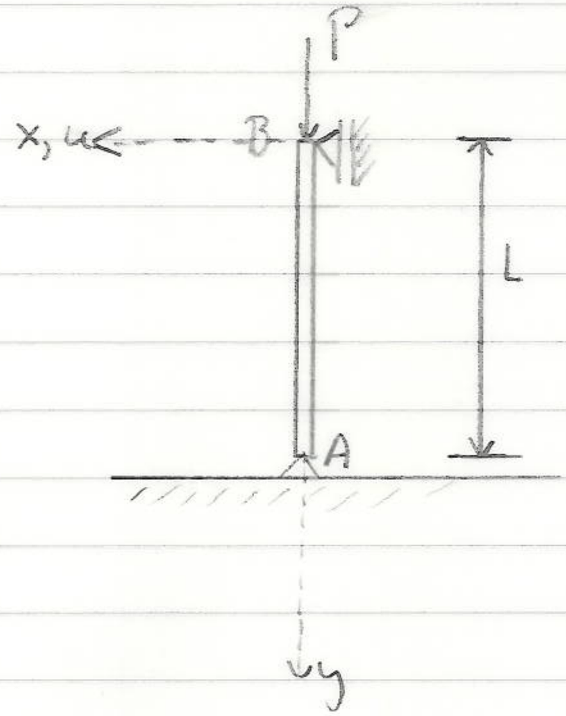
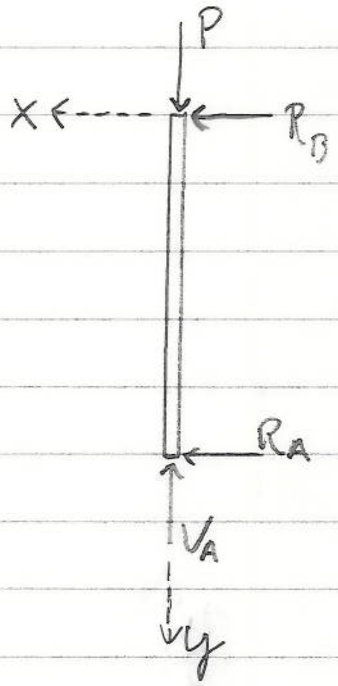
Oppg. 1   Eks. i MEK1500, 15.12.08



(a) Differensialligningen (basert på linearisert annen-ordens teori) for søylen er gitt ved

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{M}{EI}, \qquad (1)$$

der M er bøyemomentet som overføres i søylens tverrsnitt. For å finne M må vi først bestemme opplagerkreftene.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P - V_A = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{V_A = P} \quad (3)$$

$$\sum M_{mhp\,A} = 0 \Rightarrow R_B \cdot L = 0$$

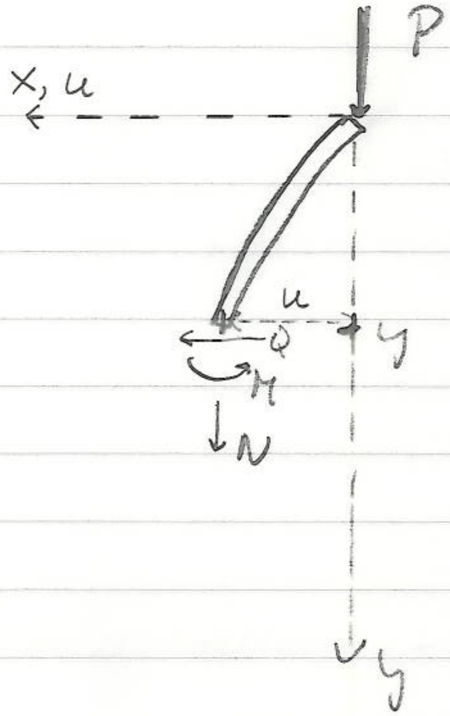
$$\Downarrow$$

$$\underline{R_B = 0} \quad (4)$$

Fra (2) får vi nå

$$\underline{R_A = 0} \quad (5)$$

Momentet som overføres i et vilkårlig snitt y, kan nå bestemmes fra likevektsbetraktning av deformert del av søylen.



$$\sum M_{mhp,\ snitt\ ved\ y} = 0 \Rightarrow \quad M - Pu = 0$$

$$\Downarrow$$

$$M = Pu \qquad (6)$$

Innsatt i (1) gir dette differensialligningen

$$\frac{d^2u}{dy^2} + k^2 u = 0, \qquad (7)$$

der $k^2 = \frac{P}{EI}$ (8)

Randbetingelsene er

$$u(0) = 0 \qquad (9)$$
$$u(L) = 0 \qquad (10)$$

(b) Bestem kritisk last og skisser den tilhørende knekkformen.

Generell løsning av (7) er

$$u(y) = A\cos ky + B\sin ky \quad (11)$$

Benytter nå randbetingelsene.

Fra (9): $u(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0$

$$\Downarrow$$

$$\underline{A = 0} \quad (12)$$

Fra (10): $u(L) = B\sin kL = 0$

$$\Downarrow$$

$\underline{B=0}$ eller $\sin kL = 0$

triviell løsning, ikke interessant

$$\Downarrow$$

$kL = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Kritisk last oppnås for $n=1$.

$$\Downarrow$$

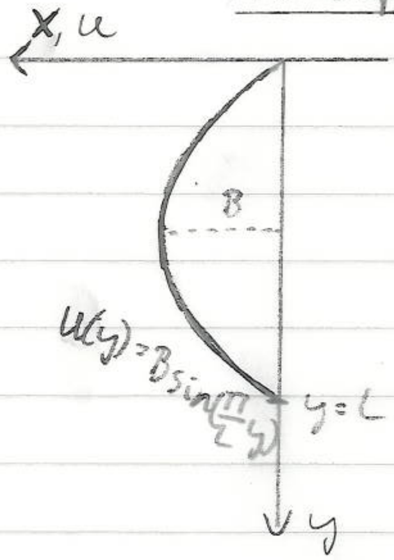
$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$\Downarrow$$

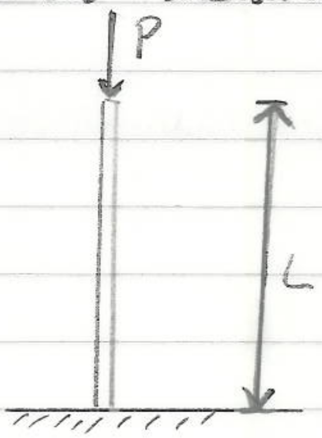
Kritisk last: $\underline{\underline{P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}}$ (13)

Tilhørende knekkform: $\underline{u(y) = B\sin(\frac{\pi}{L}y)}$ (14)

Knekkeform



(c) Bestem knekklasten for denne søylen

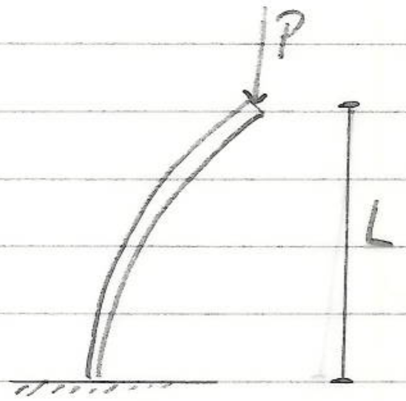


Det kan vises at knekklasten for en søyle er gitt ved

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{kr}^2}, \qquad (15)$$

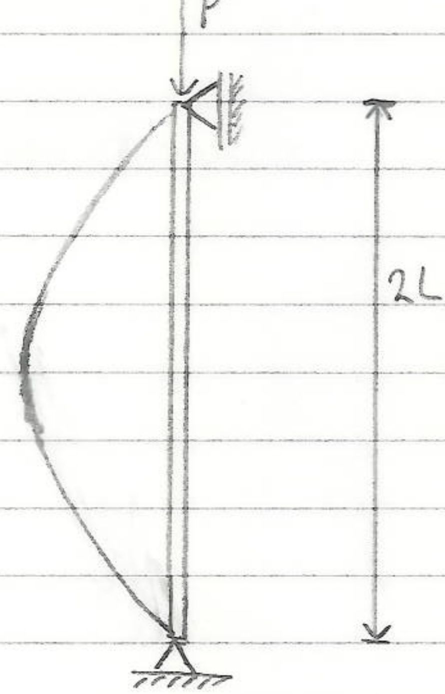
der L_{kr} er effektiv lengde eller knekklengden, dvs. avstanden mellom to infleksjonspunkter for søylen.

Knekkformen for denne søylen er gitt ved



Figur I

Det er lett å vise at denne søylen har samme knekklast (og knekkform) som søylen



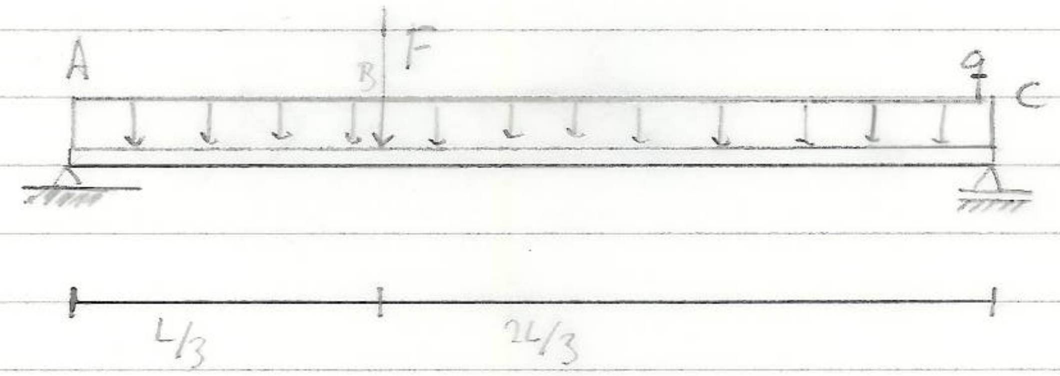
Den effektive lengden for søylen i figur I blir dermed

$$L_{kr} = 2L \qquad (16)$$

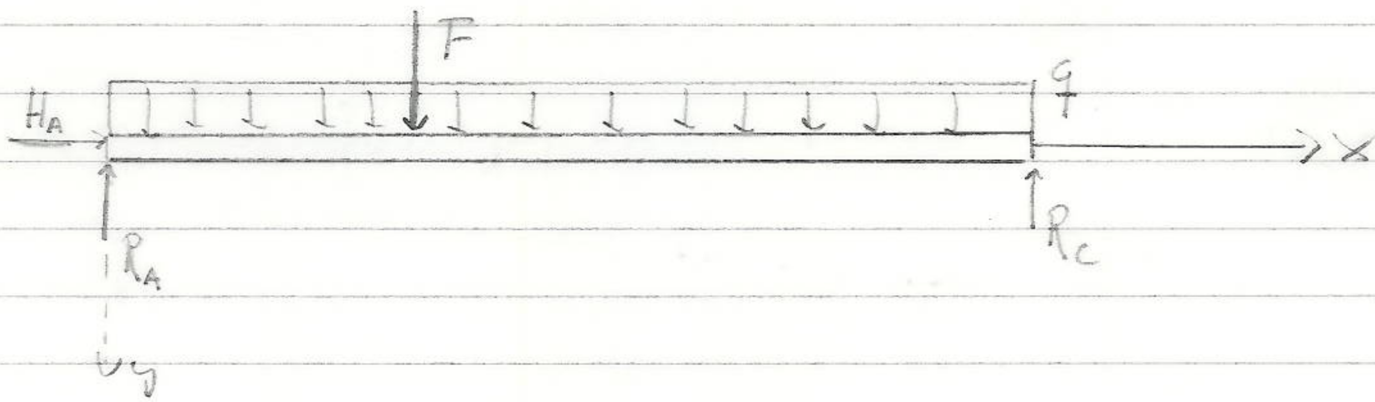
Innsatt i (16) gir dette kritisk last:

$$\underline{\underline{P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}}} \qquad (17)$$

Oppg. 2.



(a) Bestem opplagerkrefter.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{H_A = 0}} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A - R_C + F + q \cdot L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{R_A = F + qL - R_C}} \qquad (2)$$

$$\sum M_{\text{om } A} = 0 \Rightarrow -F\frac{L}{3} - qL\frac{L}{2} + R_C L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{R_C = \frac{F}{3} + \frac{qL}{2}}} \qquad (3)$$

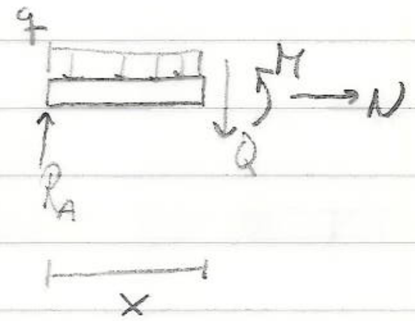
(3) inn i (4) gir

$$\underline{\underline{R_A = \frac{2F}{3} + \frac{qL}{2}}} \qquad (4)$$

(b) Bestem tverrsnittskrefter.

Vi innfører nå to snitt; et til venstre for $x = L/3$ og et til høyre for $x = L/3$ og ser på likevekt av forskjellige bjelkedeler.

I: $x < \frac{L}{3}$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{N = 0}} \quad (5)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q + qx - R_A = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Q = R_A - qx = \underline{\underline{\frac{2F}{3} + q\left(\frac{L}{2} - x\right)}} \quad (6)$$

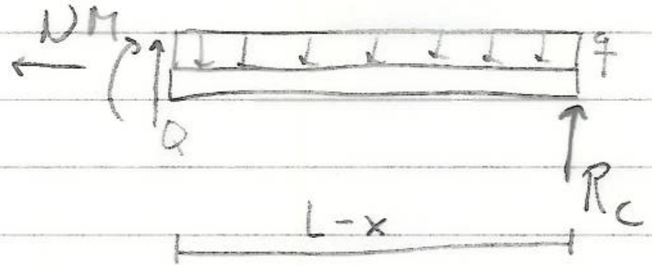
$$\sum M_{\text{mhp } x} = 0 \Rightarrow M + qx\frac{x}{2} - R_A x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$M = R_A x - qx\frac{x}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2F}{3}x + \frac{qx}{2}(L - x)}} \quad (7)$$

II, $x \in (\frac{L}{3}, L)$:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{N = 0}} \qquad (8)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -Q - R_C + q(L-x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Q = q(L-x) - \frac{F}{3} - \frac{q}{2}L$$

$$\underline{\underline{= q\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{F}{3}}} \qquad (9)$$

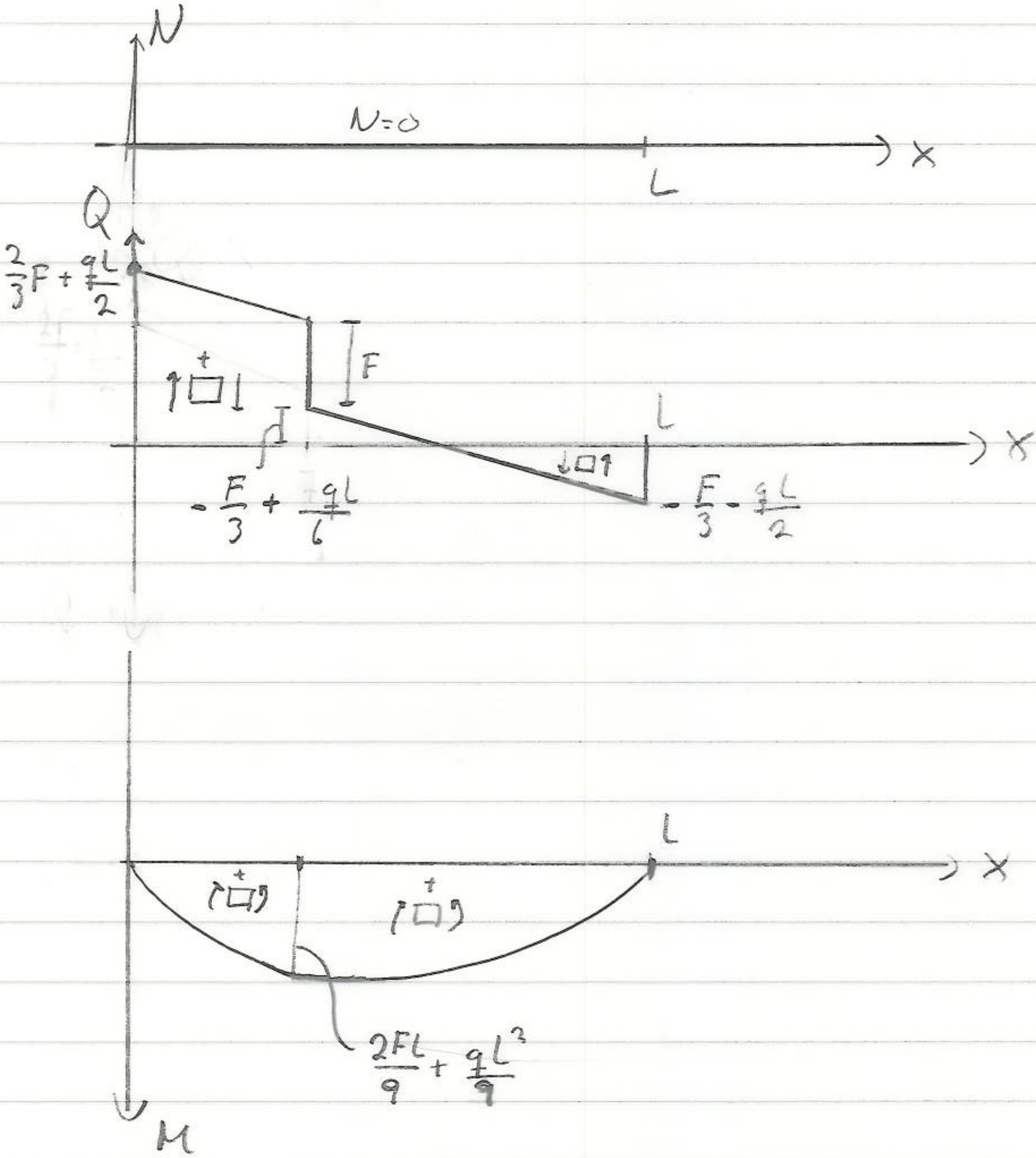
$$\sum M_{mkp\,x} = 0 \Rightarrow -M - q(L-x)\frac{(L-x)}{2} + R_c(L-x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$M = \frac{F}{3}(L-x) + \frac{qL}{2}(L-x) - \frac{q(L-x)}{2}(L-x)$$

$$\underline{\underline{= \frac{F}{3}(L-x) + \frac{qx}{2}(L-x)}} \qquad (10)$$

Snittkraftdiagram:



(c) Bjelkens bøyelinje bestemmes fra differensialligningen

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}, \qquad (11)$$

der M er bøyemomentet. For å få et „enhetlig" uttrykk for momentet benytter vi en Macaulay-funksjon. Fra momentet i (7) og et utvidet uttrykk som enkelt kan oppnås ved å se på likevekt av bjelkedelen til venstre for et snitt ved x (for $x > \frac{L}{3}$) ser vi at momentet kan uttrykkes ved

$$M(x) = \frac{2F}{3}x + \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2 - F\left[x - \frac{L}{3}\right]^1 \qquad (12)$$

Innsatt i (11) gir dette

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{2F}{3EI}x - \frac{qL}{2EI}x + \frac{q}{2EI}x^2 + \frac{F}{EI}\left[x - \frac{L}{3}\right]^1 \qquad (13)$$

Randbet. ~~blir~~:

$$v(0) = 0 \qquad (14)$$

og

$$v(L) = 0 \qquad (15)$$

Vi får:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{F}{3EI}x^2 - \frac{qL}{4EI}x^2 + \frac{q}{6EI}x^3 + \frac{F}{2EI}\left[x - \frac{L}{3}\right]^2 + C_1$$

(16)

Integrasjon en gang til gir:

$$\underline{\underline{v(x) = -\frac{F}{9EI}x^3 - \frac{qL}{12EI}x^3 + \frac{q}{24EI}x^4 + \frac{F}{6EI}\left[x - \frac{L}{3}\right]^3 + C_1 x + C_2}} \quad (17)$$

Innsatt i (14) får vi

$$\underline{\underline{C_2 = 0}} \quad (18)$$

Fra (15) og (17) får vi

$$-\frac{FL^3}{9EI} - \frac{qL^4}{12EI} + \frac{qL^4}{24EI} + \frac{4FL^3}{81EI} + C_1 L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{C_1 = \frac{5FL^2}{81EI} + \frac{qL^3}{24EI}}} \quad (19)$$

Bøyelinjen er gitt ved (17), (18) og (19)

(d) Den vertikale skjærspenningen kan uttrykkes ved

$$\tau_{xy} = \frac{QS}{Ib}, \qquad (20)$$

der Q er skjærkraften over tverrsnittet, S er første arealmoment av en del av tverrsnittet, I er andre arealmoment av (hele) tverrsnittet og b er tverrsnittets bredde. For et rektangulært tverrsnitt (som vi har i denne oppgaven) kan det vises at skjærspenningen har en parabelform over tverrsnittshøyden, med $\tau_{xy} = 0$ ved topp og bunn, og $\tau_{xy,maks} = \frac{3}{2}\tau_{gj.snitt} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A}$ midt på tverrsnittets høyde (dvs. ved $y=0$).

$\Downarrow$

For å finne punktet med størst skjærspenning trenger vi å bestemme tverrsnittet med størst skjærkraft.

Vi antar nå

$$q = \frac{2F}{L}. \qquad (21)$$

Fra skjærkraftfordelingen (og -diagrammet) fra (b) ser vi at maks. skjærkraft opptrer ved venstre ende, dvs. ved $x=0$.

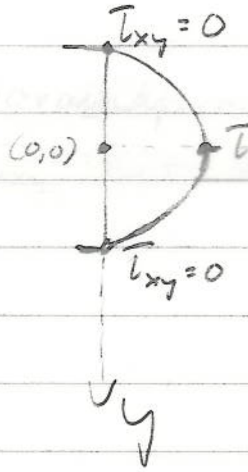
Ved bruk av (21) får vi

$$Q_{maks} = Q(x=0) = \frac{2}{3}F + \frac{L}{2}q = \frac{2}{3}F + \frac{\cancel{L}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}F}{\cancel{L}} = \underline{\frac{5}{3}F} \quad (22)$$

Maks vertikal skjærspenning opptrer i punktene gitt ved $\underline{\underline{(x,y,z) = (0,0,z)}}$, (23)

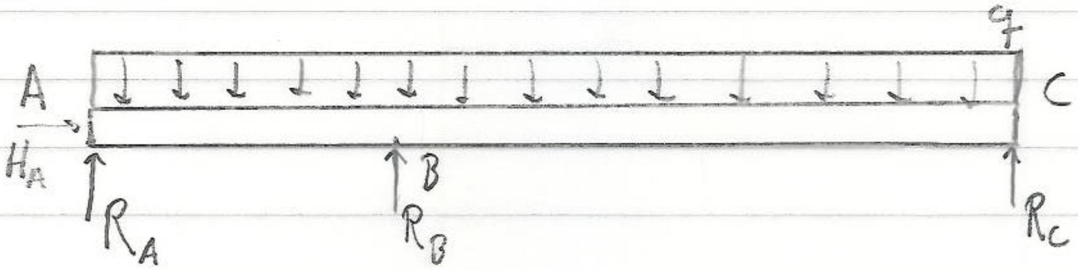
<u>dvs. ved venstre ende og midt på tverrsnittets høyde</u>

<u>Fordeling:</u>



$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{Q_{maks}}{A} = \frac{\cancel{3}}{2}\frac{\frac{5}{\cancel{3}}F}{hb} = \underline{\underline{\frac{5F}{2hb}}}$$

(e) Bjelken i denne oppgaven er som bjelken i (a), (b) og (c), bortsett fra at den ytre kraften F i B er erstattet med et opplager (rullelager) i det samme punktet. Bjelken med laster blir da



Herfra ser vi at det er 4 ukjent opplagerkraftkomponenter, mens det i 2D er 3 globale likevektsrelasjoner

$\Downarrow$

<u>Problemet er 1 gang statisk ubestemt.</u>

I og med at nedbøyningen (bøyelinjen) for et nært beslektet problem, se (c), allerede er beregnet benytter jeg metoden som kalles dobbelintegrasjonsmetoden.

Konkret betyr dette at R_B bestemmes ved å benytte $F = -R_B$ i (17)-(19) og samtidig kreve at

$$v\left(x = \frac{L}{3}\right) = 0 . \quad (24)$$

Vi får nå:

$$v\left(x=\frac{L}{3}\right) = \frac{R_B}{9EI}\left(\frac{L}{3}\right)^3 - \frac{qL}{12EI}\left(\frac{L}{3}\right)^3 + \frac{q}{24EI}\left(\frac{L}{3}\right)^4$$

$$- \frac{5R_BL^2}{81EI}\frac{L}{3} + \frac{qL^3}{24EI}\frac{L}{3} = 0 \qquad (25)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R_BL^3}{243EI} - \frac{5R_BL^3}{243EI} - \frac{qL^4}{324EI} + \frac{qL^4}{1944EI} + \frac{qL^4}{72EI} = 0 \qquad (26)$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{4R_B}{243} + qL\left(\frac{1}{72} + \frac{1}{1944} - \frac{1}{324}\right) = 0 \qquad (27)$$

$$\Downarrow$$

$$R_B = qL\frac{243}{4}\left(\frac{27+1-6}{1944}\right) = qL\frac{243}{\cancel{4}_2}\left(\frac{\cancel{22}^{11}}{1944}\right)$$

$$= qL\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{11}{16}qL}} \qquad (28)$$

Fra $F = -R_B$, (1), (3), (4) og (28) får vi nå

$$\underline{\underline{H_A = 0}} \qquad (29)$$

$$R_C = -\frac{R_B}{3} + \frac{qL}{2} = -\frac{11}{48}qL + \frac{24}{48}qL = \underline{\underline{\frac{13}{48}qL}} \qquad (30)$$

$$R_A = -\frac{2R_B}{3} + \frac{qL}{2} = -\frac{22}{48}qL + \frac{24}{48}qL = \underline{\underline{\frac{qL}{24}}} \qquad (31)$$