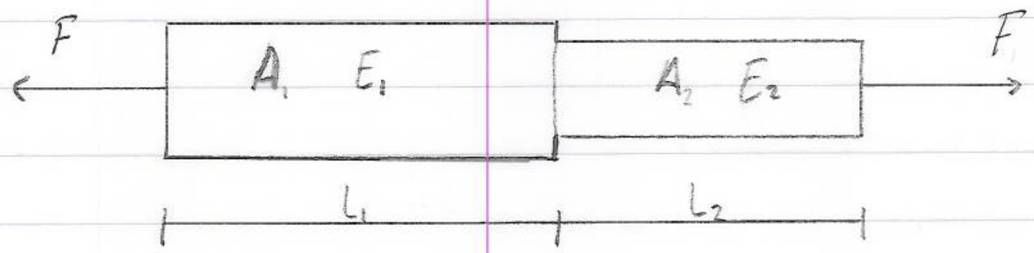
Eksamen i MEK2500 02.12.11

①



(a) Beregn total forlengelse.

Total forlengelse $\delta = \delta_1 + \delta_2$ (1).

Fra enkle likevektsbetraktninger får vi flg. relasjon for kreftene i stavene:

$$F_1 = F_2 = F \qquad (2)$$

Benytter i tillegg Hookes lov for enakset stre

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \quad \text{og} \quad \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 \quad (3)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{F}{A_1} = E_1 \frac{\delta_1}{L_1} \quad \text{og} \quad \frac{F}{A_2} = E_2 \frac{\delta_2}{L_2} \quad (4)$$

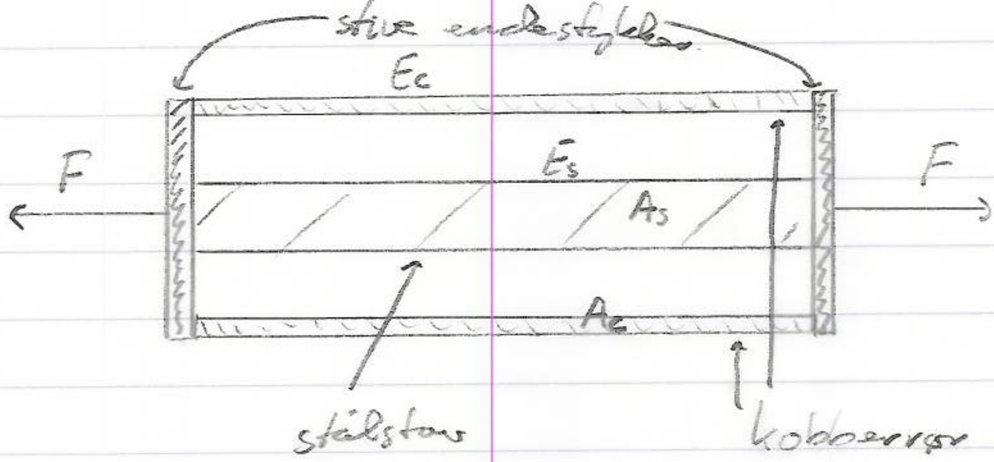
$$\Downarrow$$

$$\delta_1 = \frac{F L_1}{A_1 E_1} \quad \text{og} \quad \delta_2 = \frac{F L_2}{A_2 E_2} \quad (5)$$

Dette gir:

Total forl. $\underline{\underline{\delta = F\left(\frac{L_1}{A_1 E_1} + \frac{L_2}{A_2 E_2}\right)}}$ (6)

Ser nå på flg problem.



(b) Beregn aksialkraft i stålstav (F_s) og kobberrør (F_c).

Fra likevekt vet vi at

$$F_s + F_c = F \quad (7)$$

Stålstav og kobberrør får samme forlengelse

$$\delta_s = \delta_c = \delta \quad (8)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\varepsilon_s = \varepsilon_c = \varepsilon} \quad (9)$$

Hookes lov for enakset strekk gir:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad \text{og} \quad \sigma_c = E_c \varepsilon_c \qquad (10)$$

Fra (9) og (10) får vi:

$$F_s = E_s A_s \varepsilon \quad \text{og} \quad F_c = E_c A_c \varepsilon \quad (11).$$

Bestemmer ε ved å sette (11) inn i (7).

$$(E_s A_s + E_c A_c)\varepsilon = F$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\varepsilon = \frac{F}{E_s A_s + E_c A_c}} \qquad (12)$$

Fra (11) og (12) får vi de ønskede kreftene

$$\underline{\underline{F_s = F\frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c}, \quad F_c = F\frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c}}} \qquad (13)$$

(c) Temp. øker fra T_0 (uten termiske spenninger) til T ($\Delta T = T - T_0$). Lasten F virker fortsatt. Bestem aksialspenningene i stålstaven, σ_s, og kobberrøret, σ_c.

Likn. (7) - (9) gjelder fortsatt, men pga oppvarmingen vil alle str. bortsett fra F bli annerledes enn i (6).

Hookes lov blir nå.

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + \alpha_s \Delta T \quad \text{og} \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} + \alpha_c \Delta T \quad (14)$$

Fra (9) og (14) får vi

$$\frac{\sigma_s}{E_s} + \alpha_s \Delta T = \frac{\sigma_c}{E_c} + \alpha_c \Delta T$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_s = \frac{E_s}{E_c}\sigma_c + E_s(\alpha_c - \alpha_s)\Delta T \quad (15)$$

Fra (7) og (15) får vi

$$\sigma_s A_s + \sigma_c A_c = F$$

$$\Downarrow$$

$$A_s \frac{E_s}{E_c}\sigma_c + A_s E_s(\alpha_c - \alpha_s)\Delta T + A_c \sigma_c = F \quad \Big| \cdot \frac{1}{A_c}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_c \left(1 + \frac{A_s E_s}{A_c E_c}\right) = \frac{F}{A_c} - \frac{A_s}{A_c} E_s (\alpha_c - \alpha_s)\Delta T$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\sigma_c = \frac{E_c\left(F - E_s A_s(\alpha_c - \alpha_s)\Delta T\right)}{E_c A_c + E_s A_s}}} \quad (16)$$

Fra (15) og (16) får vi:

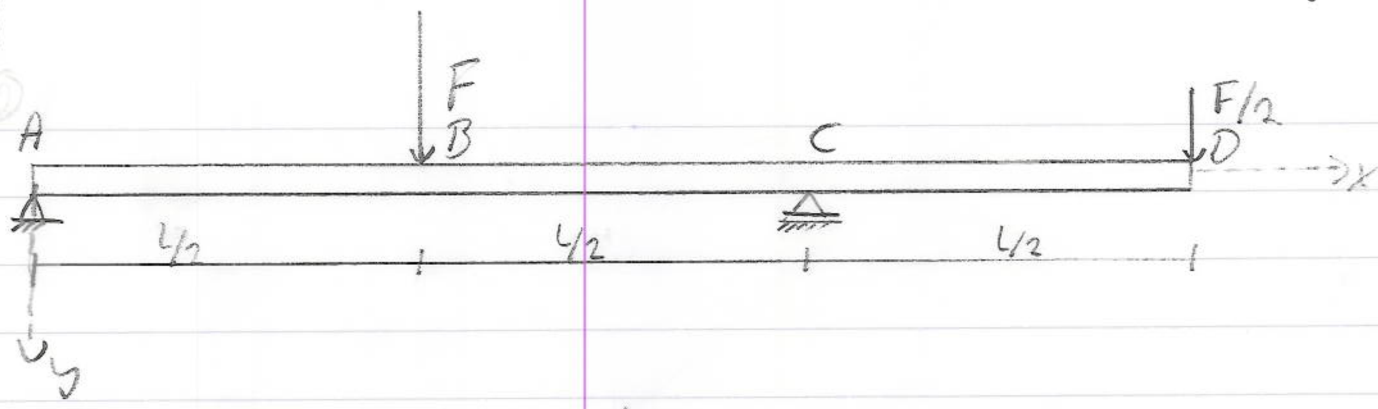
$$\sigma_s = \frac{E_s\left(F - E_s A_s (\alpha_c - \alpha_s)\Delta T\right)}{E_c A_c + E_s A_s} + E_s(\alpha_c - \alpha_s)\Delta T$$

$$= \frac{E_s\left(F - E_s A_s(\alpha_c - \alpha_s)\right)}{E_c A_c + E_s A_s} + \frac{E_s E_c A_c (\alpha_c - \alpha_s)\Delta T}{E_c A_c + E_s A_s}$$

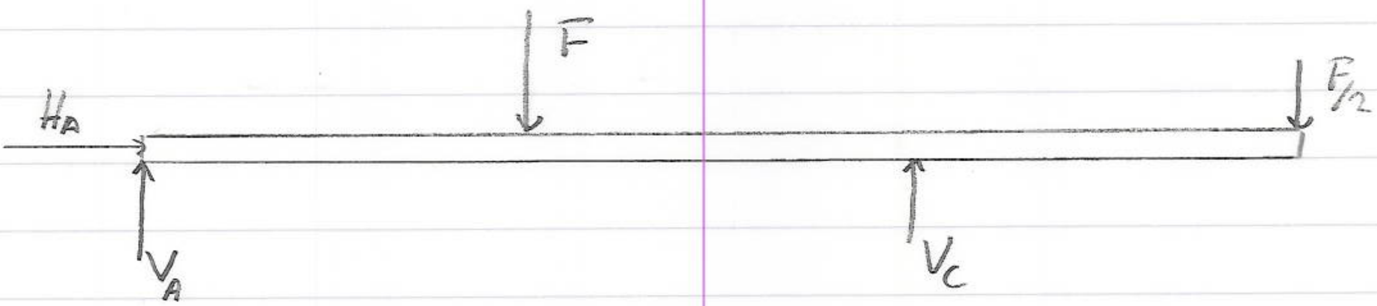
$$+ \frac{E_s E_s A_s (\alpha_c - \alpha_s)\Delta T}{E_c A_c + E_s A_s}$$

$$= \underline{\underline{\frac{E_s\left(F + E_c A_c (\alpha_c - \alpha_s)\Delta T\right)}{E_c A_c + E_s A_s}}} \qquad (17)$$

2



(a) Beregn opplagerkreftene på bjelken.



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{H_A = 0}} \qquad (18)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_A + F - V_C + F/2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$V_A = \frac{3}{2}F - V_C \qquad (19)$$

$$\sum M_{mhp,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad -F \cdot L/2 + V_C \cdot L - \frac{F}{2} \cdot \frac{3}{2}L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$V_C = \frac{F}{2} + \frac{3F}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{4}F}} \qquad (20)$$

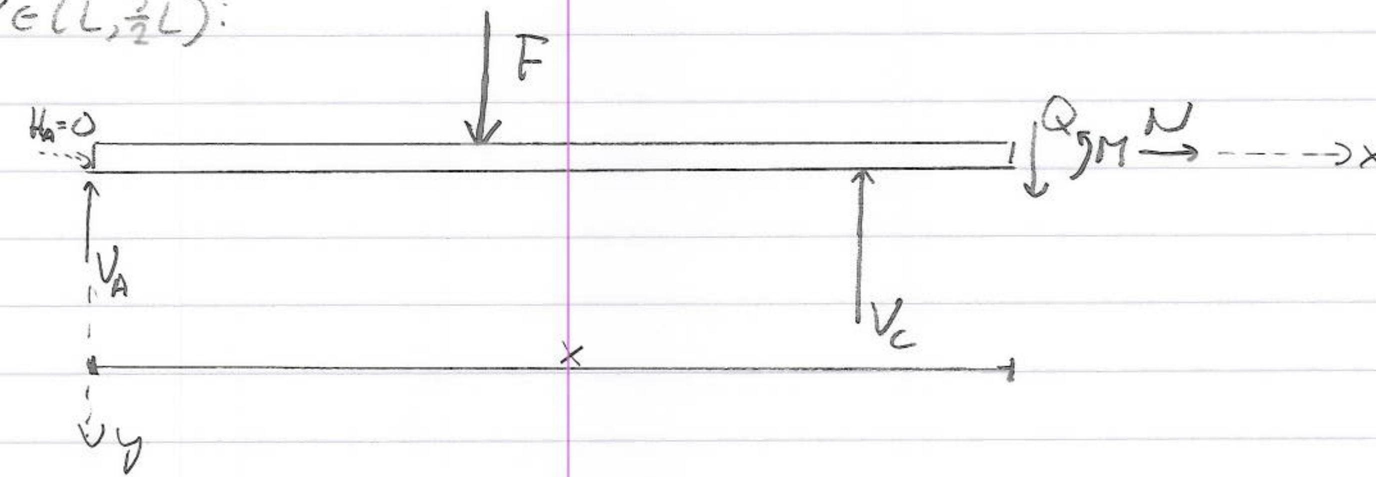
Fra (19) og (20) får vi:

$$V_A = \frac{3}{2}F - \frac{5}{4}F = \underline{\underline{\frac{1}{4}F}} \qquad (21)$$

(b) Snittkrefter og -momenter

Tenker meg et snitt mellom C og D og ser på likevekt av bjelkedel til venstre for snittet.

$x \in (L, \frac{3}{2}L)$:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{N = 0}} \qquad (22)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad Q - V_A + F - V_C = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{Q = V_A - F + V_C \quad (23)}$$

$$\sum M_{\text{omkp},x} = 0 \Rightarrow \quad M - V_A \cdot x + F(x - L/2) - V_C(x - L) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{M = V_A \cdot x - F(x - L/2) + V_C(x - L) \quad (24)}$$

Hvis vi benytter Macaulay-funksjoner, kan uttrykkene for skjærkraften (23) og bøyemomentet (24) for hele bjelken skrives som:

$$Q(x) = V_A - F[x - \tfrac{L}{2}]^0 + V_C[x - L]^0 \qquad (25)$$

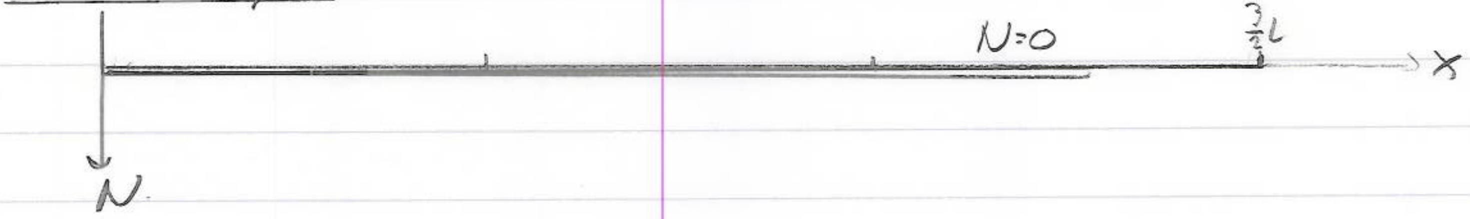
og

$$M(x) = V_A x - F[x - \tfrac{L}{2}]^1 + V_C[x - L]^1, \qquad (26)$$

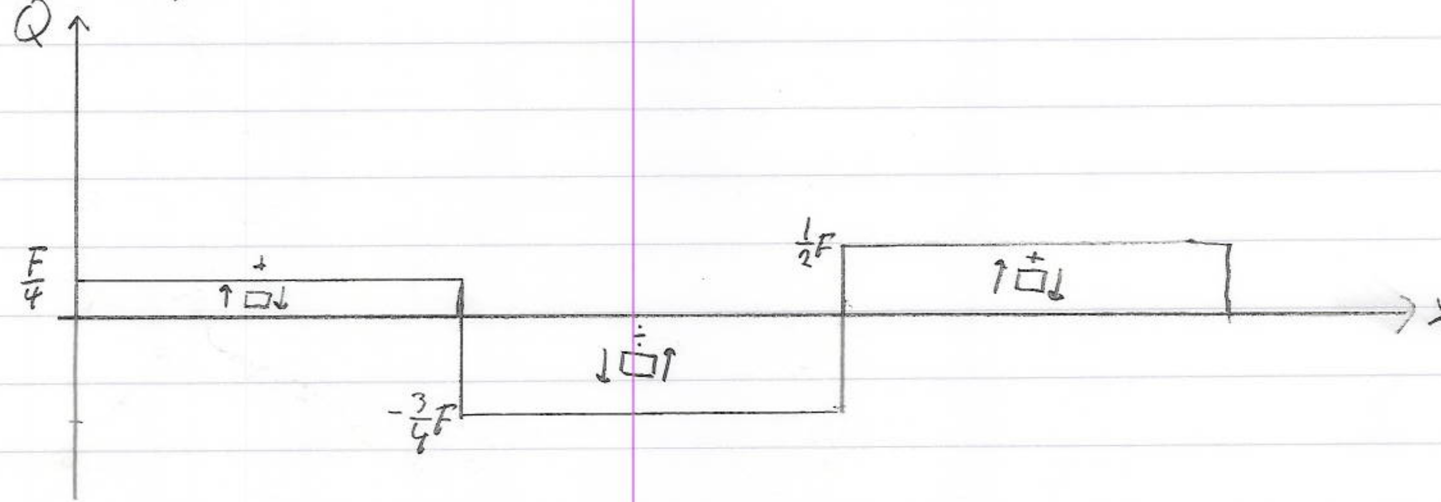
der V_A og V_C er gitt i (a).

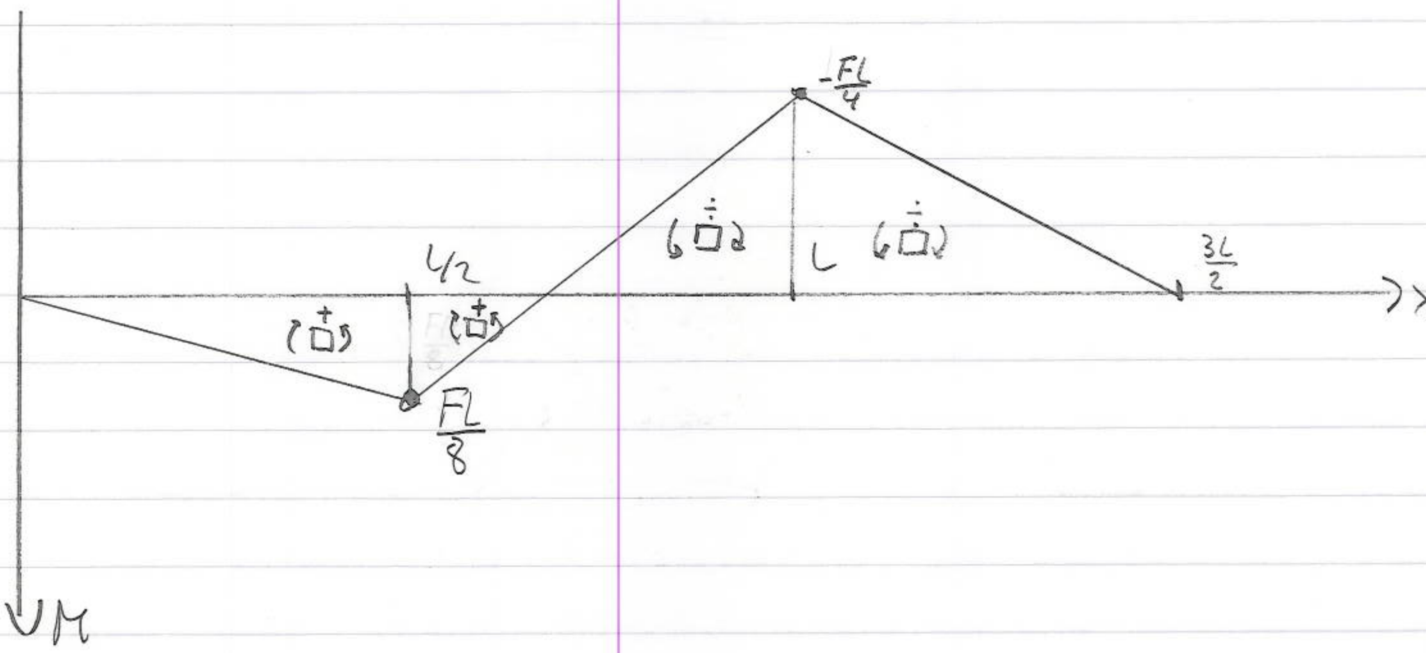
Snittkraftdiagram.

Normalkraft.



Skjærkraft.





Beregner noen verdier for momentet.

$M(0) = 0$

$M(\frac{L}{2}) = V_A \cdot \frac{L}{2} = \underline{\frac{1}{8}FL}$

$M(L) = V_A L - F\frac{1}{2}L = \frac{1}{4}FL - \frac{1}{2}FL = \underline{-\frac{1}{4}FL}$

$M(\frac{3L}{2}) = V_A \frac{3}{2}L - FL + V_C \frac{1}{2}L = \frac{3}{8}FL - FL + \frac{5}{8}FL = \underline{0}$ ok.

(C) Bestem bjelkens bøyelinje

Nedbøyningen er bestemt ved

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}, \qquad (27)$$

der momentet(26) innsatt for V_A og V_C er gitt ved

$$M(x) = \frac{1}{4}Fx - F\left[x - \frac{L}{2}\right]^1 + \frac{5}{4}F\left[x - L\right]^1 \qquad (28)$$

Diff. ligning. blir altså

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{4}\frac{F}{EI}x + \frac{F}{EI}\left[x - \frac{L}{2}\right]^1 - \frac{5}{4}\frac{F}{EI}\left[x - L\right]^1 \qquad (29)$$

med randbet.

$$v(0) = 0 \qquad (30)$$
$$v(L) = 0 \qquad (31)$$

Integrerer (29) to ganger

$$v(x) = -\frac{1}{24}\frac{F}{EI}x^3 + \frac{1}{6}\frac{F}{EI}\left[x - \frac{L}{2}\right]^3 - \frac{5}{24}\frac{F}{EI}\left[x - L\right]^3 + C_1x + \ldots \qquad (3\ldots)$$

C_1 og C_2 best. fra randbet.

Fra (30) $\quad v(0) = -0 + 0 - 0 + 0 + \underline{C_2 = 0} \qquad (33)$

Fra (31):

$$v(L) = -\frac{1}{24}\frac{F}{EI}L^3 + \frac{1}{48}\frac{F}{EI}L^3 + C_1 L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{C_1 = \frac{1}{48}\frac{F}{EI}L^2} \qquad (34)$$

Nedbøyn. blir:

$$v(x) = -\frac{1}{24}\frac{F}{EI}x^3 + \frac{1}{6}\frac{F}{EI}\left[x - \frac{L}{2}\right]^3 - \frac{5}{24}\frac{F}{EI}\left[x - L\right]^3 + \frac{1}{48}\frac{FL^2}{EI}x \qquad (35)$$

(d) Best. maksimal aksialspenning (σ_x) i bjelken og bestem hvor den verdien opptrer.

Vi vet at σ_x er gitt ved

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}y \qquad (36)$$

Her er $N(x) \equiv 0$, noe som medfører at de største verdiene for σ_x vil opptre i snitt der absoluttverdien av momentet er størst.

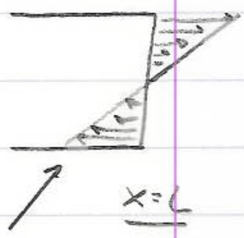
Fra momentdiagrammet i (b) ser vi at

$$|M(x)|_{maks} = |M(x{=}L)| = \underline{\frac{FL}{4}} \qquad (37)$$

Andre arealmoment for bjelken er

$$I = \frac{1}{12}bh^3 \qquad (38)$$

Spenningsfordeling ved aktuelt snitt:

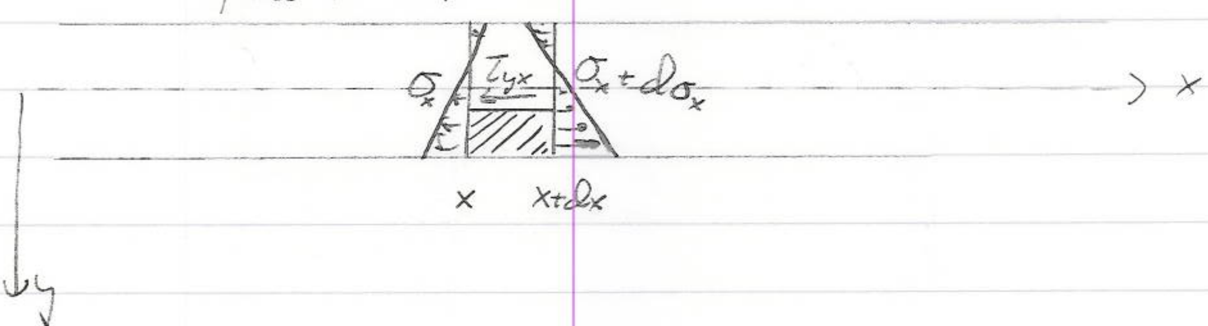


$$\sigma_{x,maks} = \sigma_x\left(x=L,\ y=-\frac{h}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}FL}{\frac{1}{12}bh^3}\cdot\frac{1}{2}h = \frac{3}{2}\frac{FL}{bh^2}$$

$$\sigma_{x,min} = \sigma_x\left(x=L,\ y=\frac{h}{2}\right) = -\frac{3}{2}\frac{FL}{bh^2}$$

(e) Utledning av uttrykk for skjærspenning.

Bjelke sett fra siden



Ser på horisontal likevekt av skravert del av infinitesimalt bjelkeelement.

$$\Sigma F_x = 0$$

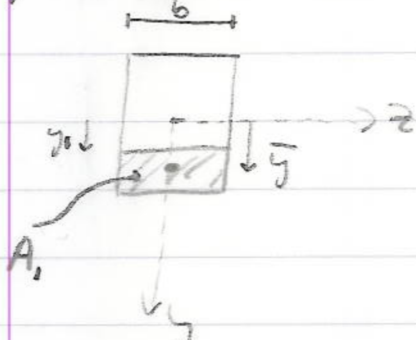
$$\Downarrow$$

$$F_x + dF_x - F_x - \tau_{yx}\cdot b\cdot dx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$dF_x = \tau_{yx}\cdot b\cdot dx \qquad (39)$$

Bjelketverrsnitt sett forfra.



(39) kan skrives om til

$$dF_x = \int_{A_1} d\sigma_x \, dA \underset{\uparrow}{=} \int_{A_1} \frac{dM}{I} y \, dA = \frac{dM}{I} \int_{A_1} y \, dA = \frac{1}{I} dM \, S(y_1) \quad (40)$$

bruker (36)
og forutsetter
N konst.

der $S(y_1)$ er første arealmoment av A_1 mhp z-aksen.

Fra (39) og (40) får vi:

$$\frac{1}{I} dM \, S(y_1) = \tau_{yx} \cdot b \cdot dx$$

$$\Downarrow$$

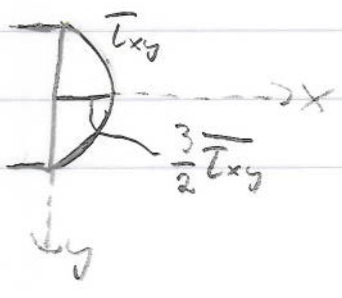
$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{\frac{dM}{dx} \cdot S(y_1)}{I \, b} = \underline{\underline{\frac{Q \cdot S(y_1)}{I \, b}}} \quad (41)$$

Det kan bemerkes at $S(y_1)$ er 0 for $y_1 = \pm \frac{h}{2}$, og at den ellers har en parabelform over tverrsnittet $\Rightarrow \tau_{xy}$ får også parabelform.

Mellom punktene A og B har vi $Q = \frac{F}{4}$.

$$\overline{\tau_{xy}} = \frac{Q}{A} = \underline{\frac{F}{4bh}} \quad (42)$$

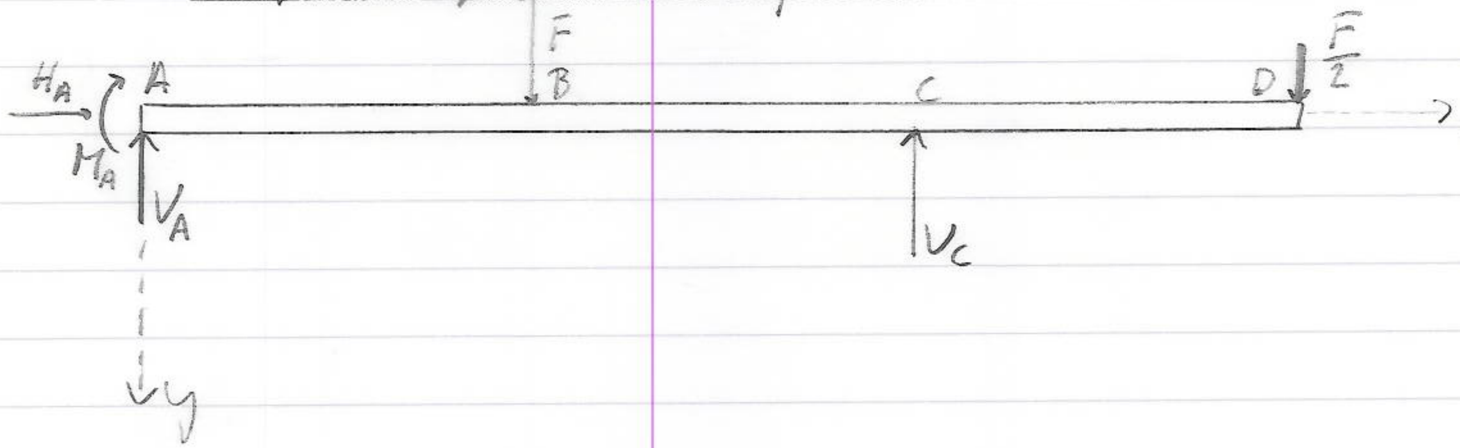
Skjærspenn. fordeling over snitt mellom A og B.



(f) Bestem opplagerkrefter på statisk ubestemt bjelke

Skal benytte det som kalles „dobbelintegrasjonsmetoden"
Etablerer først sammenheng mellom opplagerkrefter.

Frilegemediagram av bjelken.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{H_A = 0} \quad (43)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_A + F - V_C + \tfrac{1}{2}F = 0$$

$$\Downarrow$$

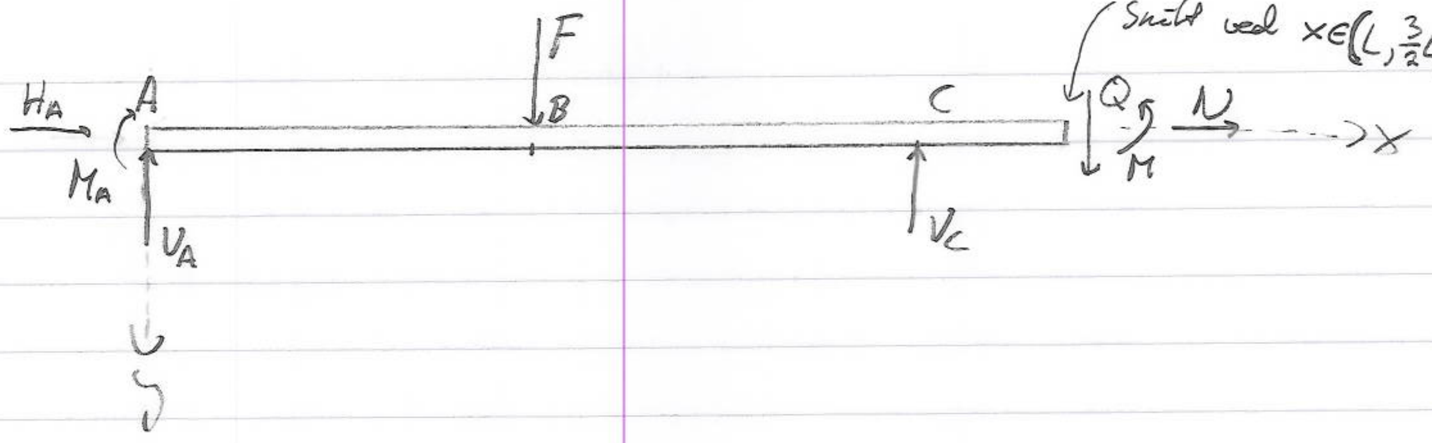
$$\underline{V_A = \tfrac{3}{2}F - V_C} \quad (44)$$

$$\sum M_{\text{mhp } A} = 0 \Rightarrow -M_A - F \cdot \frac{L}{2} + V_C \cdot L - \frac{F}{2} \cdot \frac{3}{2}L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{M_A = V_C \cdot L - \tfrac{5}{4}FL} \quad (45)$$

Uttrykkene (44) og (45) gir 2 relasjoner mellom V_A, V_C og M_A. Den tredje relasjonen som trengs, fås vha randverdiproblemet for nedbøyningsfunksjonen. Vi trenger da et uttrykk for momentfordelingen i bjelken.



$$\Sigma M_{mhp,x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$M - M_A - V_A x + F(x - \tfrac{L}{2}) - V_C(x - L) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{M(x) = M_A + V_A x - F(x - \tfrac{L}{2}) + V_C(x - L)} \quad (46)$$

Vha Macaulay-funksjoner kan vi etablere et uttrykk som gjelder for $M(x)$ langs hele bjelken:

$$\underline{M(x) = M_A + V_A x - F[x - \tfrac{L}{2}]^1 + V_C[x - L]^1} \quad (47)$$

Innsatt i diff.lign. for v (se (27)) får vi:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_A}{EI} - \frac{V_A}{EI}x + \frac{F}{EI}[x - \tfrac{L}{2}]^1 - \frac{V_C}{EI}[x - L]^1 \quad (48)$$

<u>med randbet.</u>

$$v(0) = 0 \quad (49)$$

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 \quad (50)$$

$$v(L) = 0 \quad (51)$$

Integrerer (48) en gang

$$\Downarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{M_A}{EI}x - \frac{1}{2}\frac{V_A}{EI}x^2 + \frac{1}{2}\frac{F}{EI}[x-\tfrac{L}{2}]^2 - \frac{1}{2}\frac{V_C}{EI}[x-L]^2 + C_1$$

(52)

Fra randbet (50) ser vi nå at

$$\underline{C_1 = 0} \qquad (53)$$

Integrerer en gang til.

$$v(x) = -\frac{1}{2}\frac{M_A}{EI}x^2 - \frac{1}{6}\frac{V_A}{EI}x^3 + \frac{1}{6}\frac{F}{EI}[x-\tfrac{L}{2}]^3 - \frac{1}{6}\frac{V_C}{EI}[x-L]^3 + C_2$$

(54)

Fra randbet (49) ser vi nå at

$$\underline{C_2 = 0 \qquad (55)}$$

Benytter nå randbet. (51) til å etablere en tilleggsrelasjon mellom M_A, V_A og V_C.

$$v(L) = -\frac{1}{2}\frac{M_A}{EI}L^2 - \frac{1}{6}\frac{V_A}{EI}L^3 + \frac{1}{48}\frac{F}{EI}L^3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{M_A = -\tfrac{1}{3}V_A L + \tfrac{1}{24}FL \qquad (56)}$$

Fra (44) og (56) får vi

$$M_A = -\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}F - V_C\right] \cdot L + \frac{1}{24}FL$$

$$= -\frac{1}{2}FL + \frac{1}{3}V_C L + \frac{1}{24}FL$$

$$= -\frac{11}{24}FL + \frac{1}{3}V_C L \qquad (57)$$

(57) og (45) gir nå

$$V_C L - \frac{5}{4}FL = -\frac{11}{24}FL + \frac{1}{3}V_C L$$

$$\Downarrow$$

$$V_C - \frac{1}{3}V_C = -\frac{11}{24}F + \frac{5}{4}F$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{3}V_C = \frac{19}{24}F$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{V_C = \frac{3}{2} \cdot \frac{19}{24}F = \frac{19}{16}F}} \qquad (58)$$

Innsatt i (48) gir dette

$$\underline{\underline{V_A = \frac{3}{2}F - \frac{19}{16}F = \frac{24}{16}F - \frac{19}{16}F = \frac{5}{16}F}} \qquad (59)$$

Fra (57) får vi:

$$\underline{\underline{M_A = -\frac{11}{24}FL + \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{16}FL = -\frac{22}{48}FL + \frac{19}{48}FL = -\frac{3}{48}FL = -\frac{1}{16}FL}} \qquad (60)$$

H_A, V_C, V_A og M_A er nå gitt ved (43), (58), (59) og (6