Oppgavehefte

i

MEK2500 - Faststoffmekanikk

av

Henrik Mathias Eiding

og

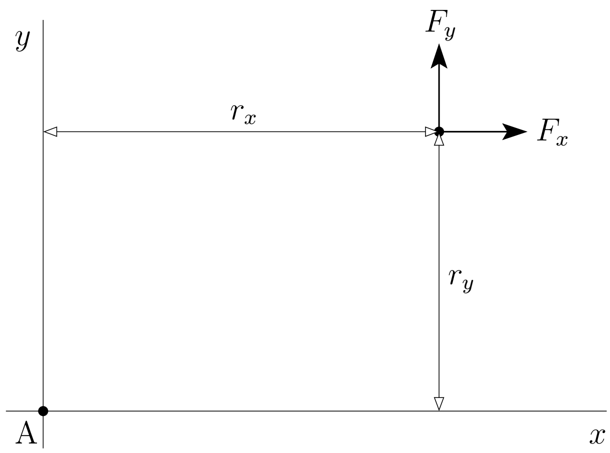
Harald Osnes

August 2010

Oppgave 1

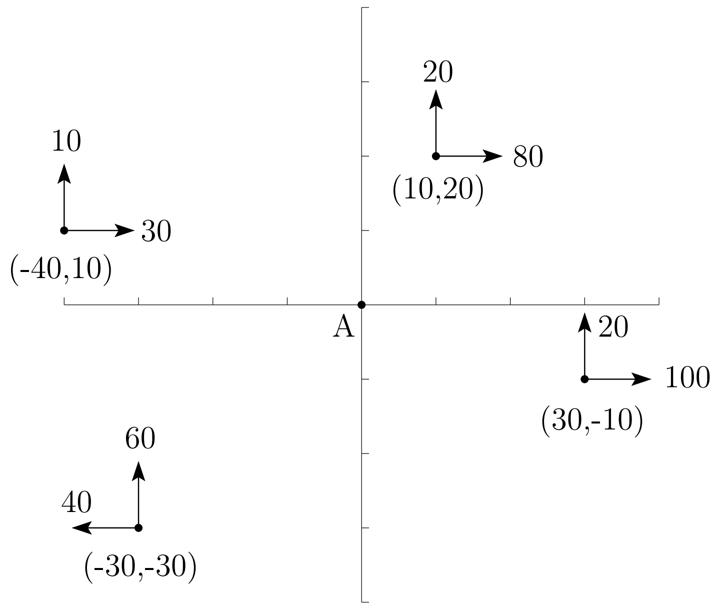
En kraft har x- og y-komponentene F_x og F_y. Avstanden fra et gitt punkt A til et punkt på kraftens angrepslinje er r_x og r_y i henholdsvis x- og y-retning, se figur 1. Momentet til F om z-aksen er derfor

$$M_z = r_x F_y - r_y F_x. \tag{1}$$



Figur 1: Kraften gir et moment om z-aksen.

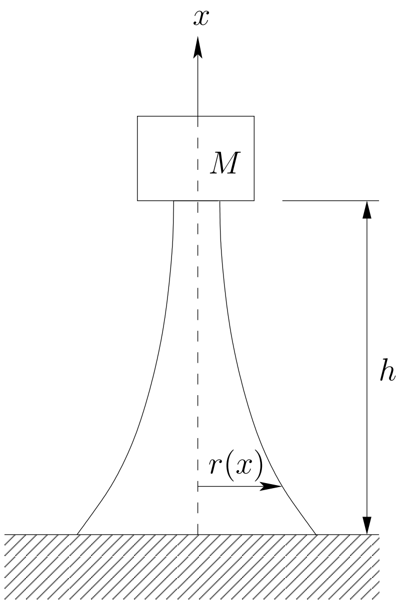
Ved å benytte ligning (1), lag et Matlab-script som beregner momentet om A til kraftsystemet vist i figur 2. Finn også resultantkraftens komponenter og størrelse.



Figur 2: Kraftsystem.

Oppgave 2

Det skal lages et $h = 100$ m høyt tårn av betong som på toppen skal bære en masse $M = 200\ 000$ kg, se figur 3. Tårnets tverrsnitt skal være sirkulært over hele høyden. Betongens egenvekt og maksimalt tillatte spenning er henholdsvis $\rho_b = 2400$ kg/m^3 og $\sigma_{maks} = 1$ N/mm^2. Bestem en egnet form på tårnet dersom det kreves at ethvert tverrsnitt skal utsettes for samme spenning. Bruk Matlab til å plotte tårnets radius som funksjon av x.

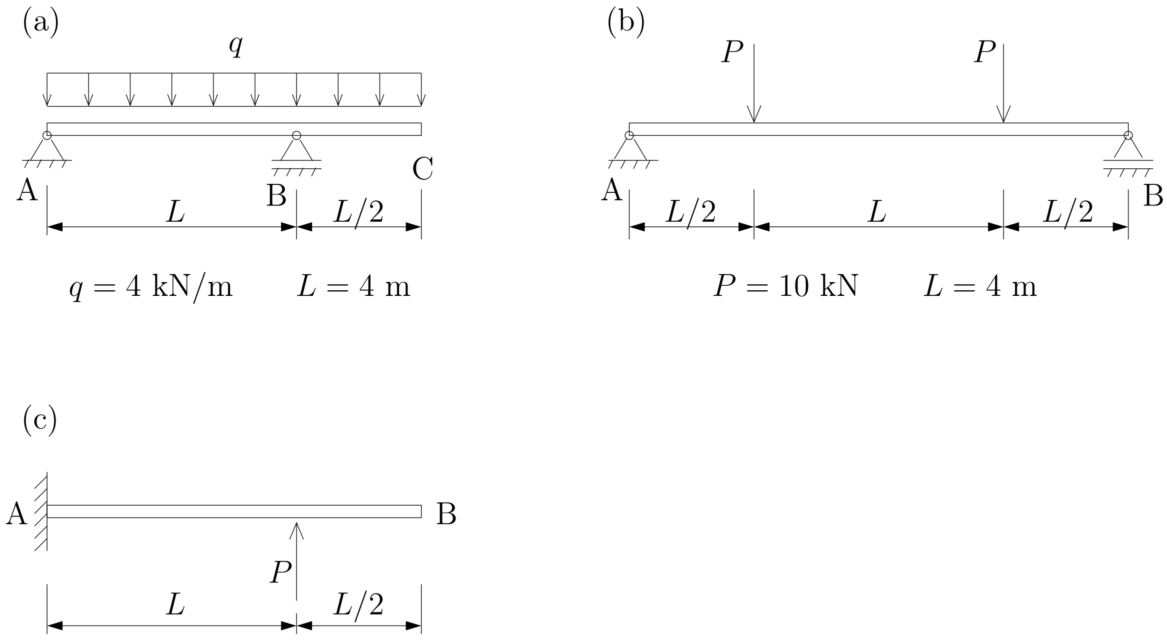


Figur 3: Tårn med sirkulært tverrsnitt.

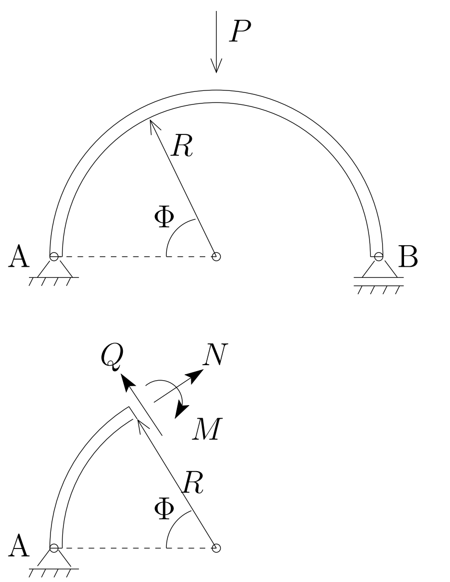
Oppgave 3

1. Beregn opplagerreaksjoner, skjærkrefter og momenter for bjelkene i figur 4. Tegn moment- og skjærkraftdiagrammer og vis retninger på de indre kreftene.

2. Buen AB i figur 5 er fritt opplagt ved A og B og har form som en halvsirkel. Opplageret i B er et rullelager som kan bevege seg fritt i horisontalretningen. Finn aksialkraften (N), skjærkraften (Q) og momentet (M) på grunn av lasten P uttrykt ved P, R og Φ for $0 \leq \Phi \leq \pi/2$.



Figur 4: Bjelkene det skal beregnes for.



Figur 5: Buen det skal beregnes for.

Oppgave 4

a) Et kubisk legeme av lineært elastisk materiale er belastet med normalspenningene σ_x, σ_y og σ_z. Uttrykk normaltøyningene ε_x, ε_y og ε_z ved normalspenningene og de elastiske konstantene E og ν. Legg uttrykkene inn i Matlab (som matrise-vektor-produkt) og finn spenningene i legemet når følgende er gitt:

$$\varepsilon_x = 0.0002 \qquad \varepsilon_y = -0.00015 \qquad \varepsilon_z = 0.0002$$

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2 \qquad \nu = 0,25$$

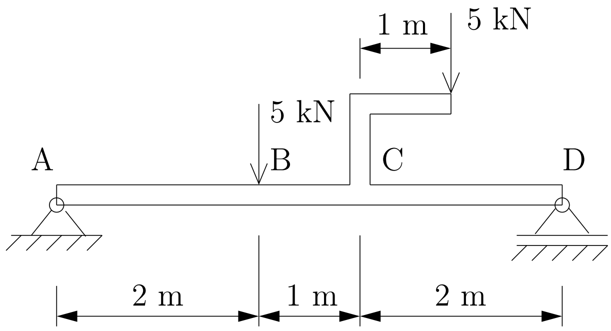
b) Uttrykk nå normalspenningene ved normaltøyningene og legg dette inn i Matlab. Finn spenningene i legemet og sammenlign svaret med oppgave a).

c) Beregn spenningstilstanden dersom normaltøyningen i y-retning endres til $\varepsilon_y = 0$. Hva slags tilstand har vi nå? Er endringene i spenningene som forventet?

d) Hva slags tilstand har vi dersom $\sigma_y = 0$? Kan tilstanden i c) og d) opptre samtidig?

Oppgave 5

Beregn moment- og skjærkraftfordelingen for bjelken ABCD vist i figur 6. Plott diagrammene ved å bruke Matlab.

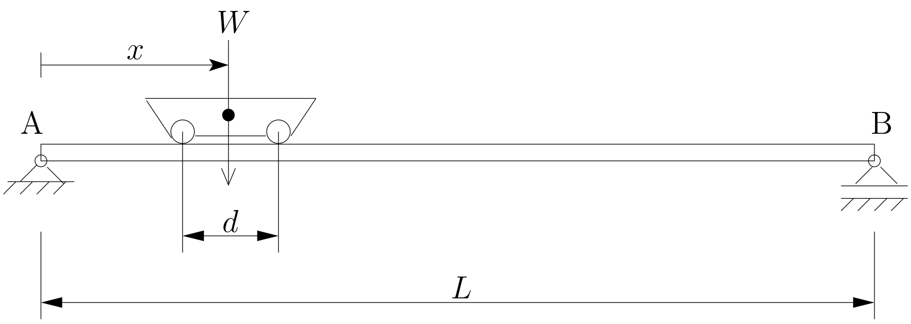


Figur 6: Fritt opplagt bjelke.

Oppgave 6

En vogn med vekt W triller langs en fritt opplagt bjelke, som vist i figur 7. Det er kun kontakt mellom bjelken og vognens hjul, som står i en avstand d fra hverandre. Vis at bjelkens maksimale moment inntrer når avstanden mellom et av hjulene og et opplager er c, der c er gitt ved

$$c = \frac{L}{4}\left(2 - \frac{d}{L}\right).$$

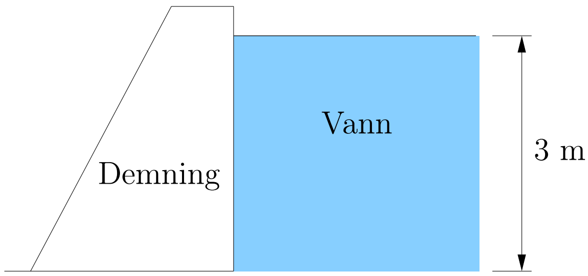


Figur 7: Vognen kan trille fritt fra A til B.

Beregn også momentet i bjelkens midtpunkt som funksjon av posisjonen x til vognens midtpunkt ($x \in [d/2, L - d/2]$). Sett $L = 6$ m, $d = 0.5$ m og $W = 80$ kN og plott grafen ved hjelp av Matlab.

Oppgave 7

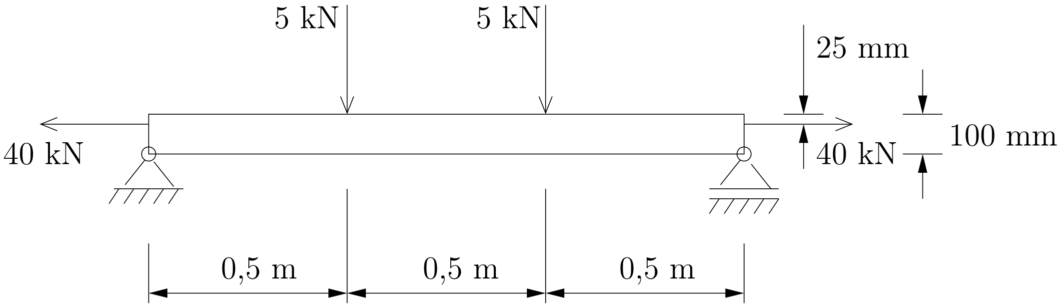
Figur 8 viser en 3 m dyp demning. Demningen har en lengde på 12 m (normalt papirplanet). Beregn moment- og skjærkraftfordelingen for demningskonstruksjonen, og bruk Matlab til å plotte tilhørende diagrammer. Vannets massetetthet kan settes til 1000 kg/m^3.



Figur 8: Demning.

Oppgave 8

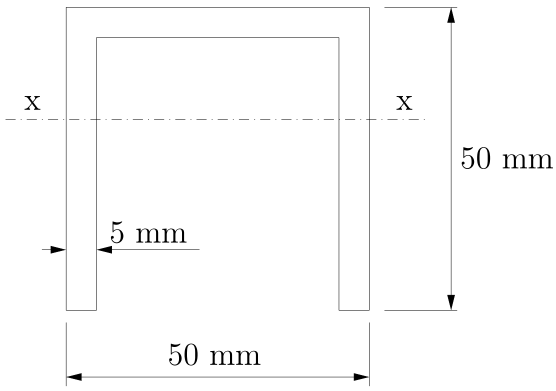
En fritt opplagt bjelke med tverrsnitt $b \times h = 50$ mm$\times$100 mm er belastet som vist i figur 9. Bestem fordelingen av aksialspenninger over tverrsnittet ved bjelkens midtpunkt. Bruk Matlab til å plotte spenningsfordelingen. Hvilken eksentrisitet (avstand fra bjelkeaksen) må de horisontale lastene ha for at bjelken ikke skal få noen trykkspenninger i overkant av tverrsnittet?



Figur 9: Fritt opplagt bjelke utsatt for tverrlaster og eksentrisk aksiallast i hver ende.

Oppgave 9

En bjelke med kanaltverrsnitt er 50 mm bred og 50 mm høy og har en veggtykkelse på 5 mm, se figur 10. Bjelken er fritt opplagt på et horisontalt underlag, og den er 1 m lang. Den er belastet med en jevnt fordelt last på 50 kN/m over hele lengden og en punktlast på 50 kN på midten. Disse lastene virker nedover mot underlaget (vertikalt). Bjelken bøyes om nøytralaksen $x - x$, se figur 10. Beregn skjærspenningsforløpet over tverrsnittet 0.25 m fra et av opplagrene, og benytt Matlab til å plotte forløpet. Indiker karakteristiske verdier (gjerne for hånd).



Figur 10: Kanaltverrsnitt.

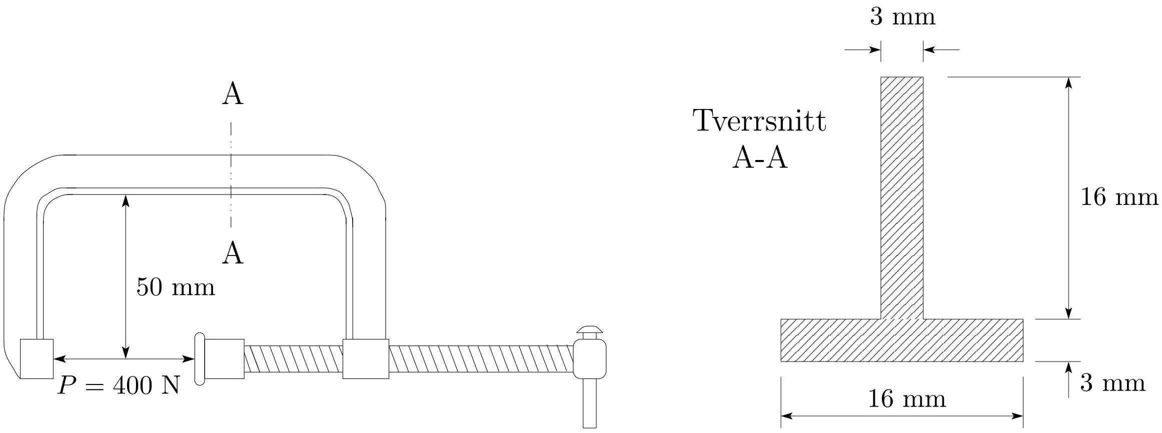
Oppgave 10

Figur 11 viser en klemme som skrues til opp til en kraft P. I snitt A-A er tverrsnittets dimensjoner som vist.

a) For det viste tverrsnitt skal arealsenter og arealtreghetsmomenter beregnes. Definer benyttet koordinatsystem (i tverrsnittsfigur).

b) Beregn normalspenningsfordelingen over tverrsnittet A-A og plott fordelingen i Matlab.

c) Oppgave a) og b) skal nå gjennomføres for en skrutvinge med et kvadratisk tverrsnitt som har samme tverrsnittsareale som T-tverrsnittet. Sammenlign svarene.

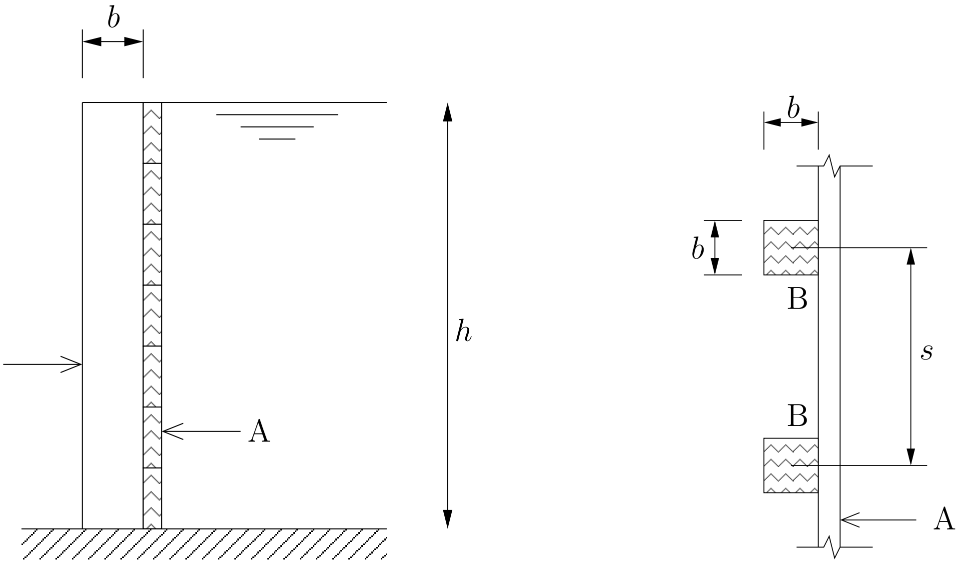


Figur 11: Skrutvinge.

Oppgave 11

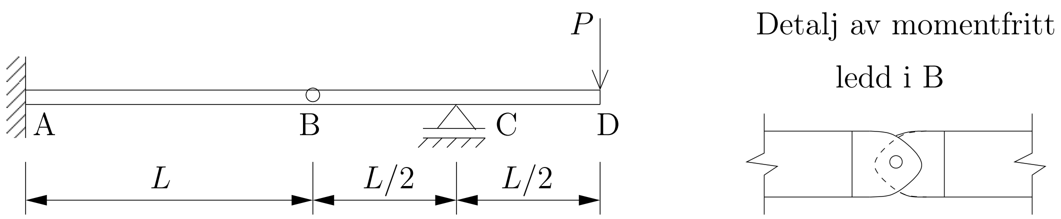
En midlertidig dam er bygget opp av horisontale og vertikale planker av tre, henholdsvis A og B i figur 12. De vertikale plankene (B) er slått ned i grunnen, har kvadratisk tverrsnitt ($b \times b$) og står med en avstand s fra hverandre.

Beregn nødvendig dimensjon b for vertikalplankene dersom $s = 0.8$ m, $h = 2$ m og maksimalt tillatt bøyespenning er $\sigma_{maks} = 8$ MPa (tre). Benytt $\rho = 1000$ kg/m^3 for massetettheten til vann.



Figur 12: Demning av tre.

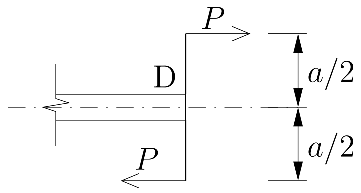
Oppgave 12



Figur 13: Bjelke med momentfritt ledd.

a) Beregn opplagerkrefter, skjærkrefter (Q) og momenter (M), og tegn opp skjærkraft- og momentdiagram for bjelken i figur 13. Angi verdier i diagrammenes knekkpunkter samt retning på snittkreftene.

b) Gjenta oppgaven, men nå med et ytre moment $M_D = Pa$ ved den frie enden (pkt. D), se figur 14.

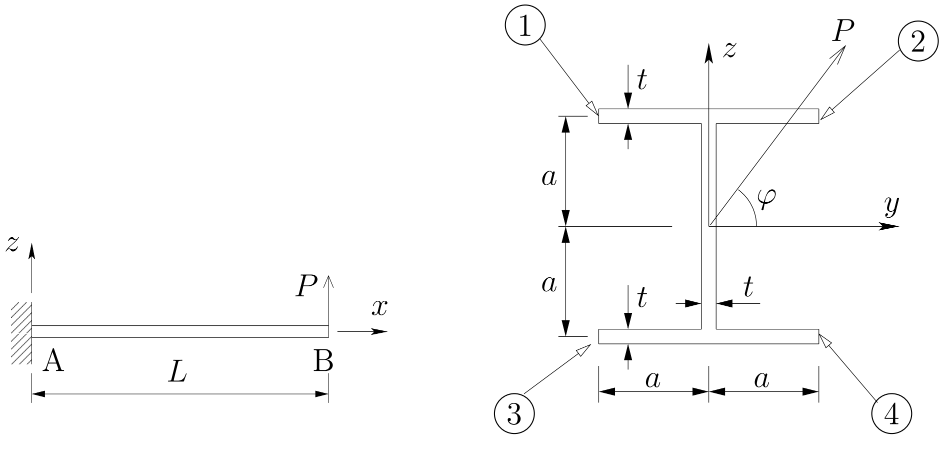


Figur 14: Bjelken er nå påført et moment $M_D = Pa$ i D.

Oppgave 13

a) Utkragerbjelken i figur 15 er påkjent av en skrålast P ved B. Bjelkens tverrsnitt er som vist i figuren. For $\varphi = 45°$, beregn normalspenningene (σ_x) i tverrsnittspunktene 1, 2, 3 og 4 for innspenningstverrsnittet og skissér (i diagramform) spenningsfordelingen over tverrsnittet. NB! Det kan antas at $a \gg t$ ($\rightarrow$ gir f.eks. $I_z = 4a^3t/3$).

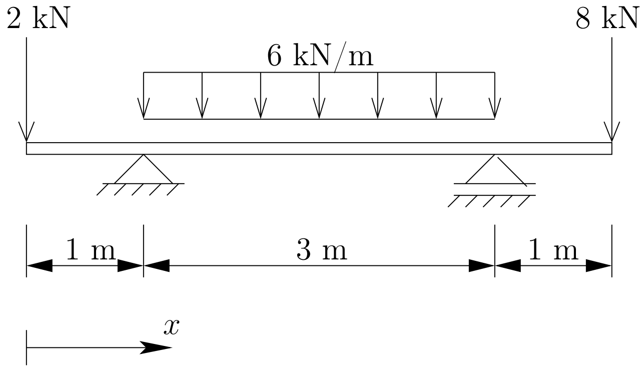
b) Beregn skjærspenningsfordelingen over innspenningstverrsnittet til bjelken i a) for $\varphi = 90°$.



Figur 15: Utkragerbjelke med I-tverrsnitt.

Oppgave 14

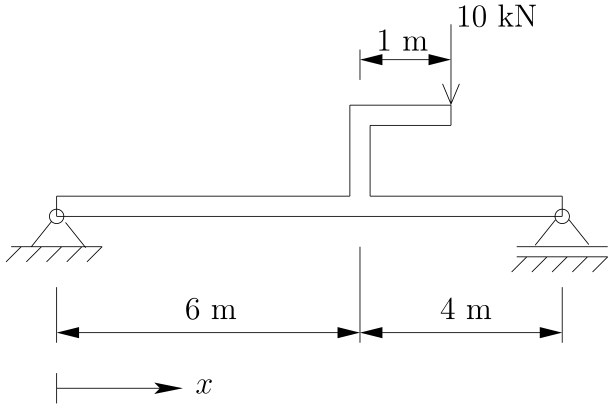
En bjelke er utsatt for lasten vist i figur 16. Bjelkens bøyestivhet er $EI = 1$ MNm^2. Beregn bjelkens nedbøyning som en funksjon av x og plott grafen ved hjelp av Matlab.



Figur 16: Fritt opplagt bjelke.

Oppgave 15

En 10 m lang fritt opplagt bjelke bærer lasten vist i figur 17. Bjelkens bøyestivhet er $EI = 100$ MNm^2. Beregn bjelkens nedbøyning som funksjon av x og plott denne ved hjelp av Matlab. Finn også tverrsnittet (x-koordinaten) som får den største nedbøyningen.



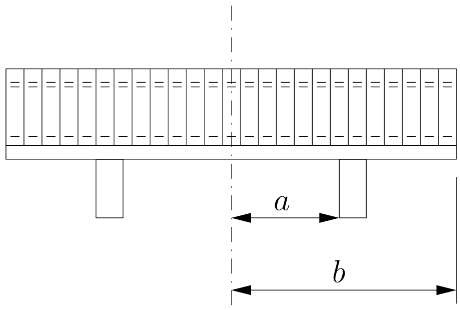
Figur 17: Fritt opplagt bjelke.

Oppgave 16

En hylle skal bæres av to støtter plassert symmetrisk om hyllas midtpunkt, se figur 18. Hylla er lineært elastisk med bøyestivhet EI.

a) Finn uttrykk for momentet ved hyllas midtpunkt og støtter som funksjon av forholdet a/b (anta at b er konstant). Anta fornuftige verdier for lasten på hylla og b, og plott momentene ved hjelp av Matlab. Hvor må støttene stå for at det maksimale momentet skal være minst mulig?

b) Bestem nedbøyningen ved hyllas midtpunkt og ender som funksjon av a/b (anta at b er konstant). Anta nå også en verdi for EI, og plott nedbøyningene ved hjelp av Matlab. Hvor må støttene stå for at den maksimale nedbøyningen skal være minst mulig?



Figur 18: Hylla står på understøttelser plassert symmetrisk om hyllas midtpunkt.

Oppgave 17

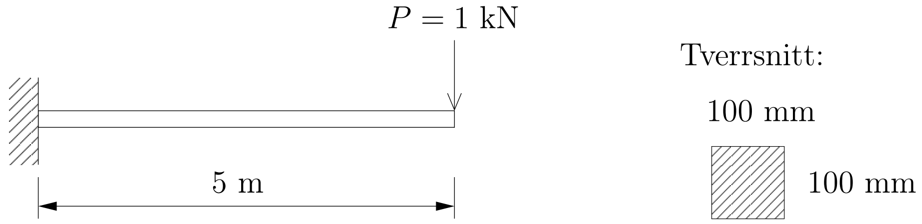
I denne oppgaven skal vi undersøke betydningen av skjærdeformasjon for bjelken i figur 19. Bjelken har kvadratisk tverrsnitt $b \times h = 100$ mm $\times$ 100 mm og er av stål med $E = 210\ 000$ N/mm^2 og $\nu = 0.25$.

a) Beregn nedbøyningen på grunn av bøyning som funksjon av x.

b) Gjør tilsvarende for forskyvningen på grunn av skjærkrefter.

c) Bruk Matlab til å plotte funksjonene i a) og b) og sammenlign.

d) Gjør oppgavene a) - c) når punktlasten P erstattes med en jevnt fordelt last $q = 0.2$ kN/m $(= P/5\text{m})$.



Figur 19: Utkragerbjelke med kvadratisk tverrsnitt.

Oppgave 18

Som oppgave 18, men nå er bjelken fritt opplagt, og punktlasten er plassert på midten.

Oppgave 19

I denne oppgaven skal vi utføre nedbøyningsberegninger ved hjelp av *differansemetoden*, som er en numerisk metode for å løse differensialligninger.

Som kjent kan nedbøyningen til en bjelke (på grunn av bøyning) finnes ved å løse differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI}.$$

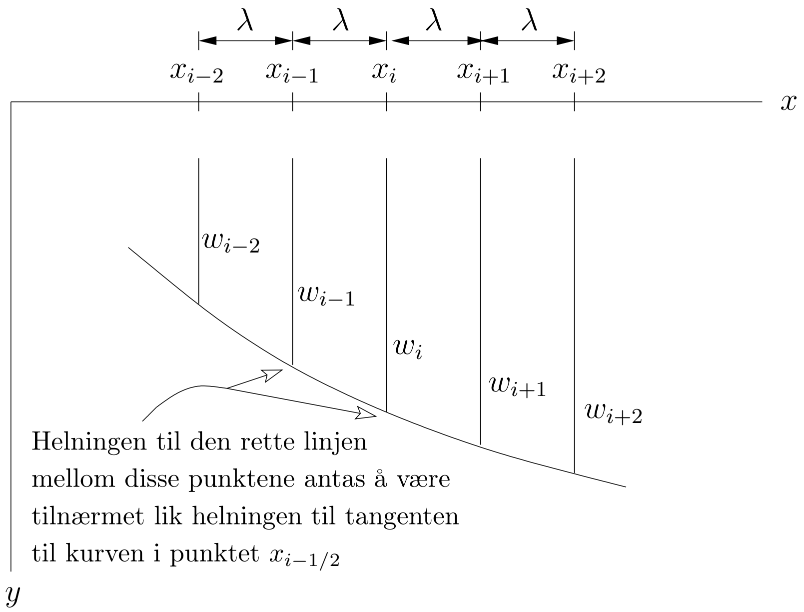
Tanken bak differansemetoden er å omforme differensialligningen til et sett lineære algebraiske ligninger, som er enkle å løse. For bjelkene vi skal studere i denne oppgaven, er differensialligningen rimelig enkel å løse, så fordelen med å bruke differansemetoden er ikke så stor. Oppgavens intensjon er imidlertid å illustrere hvordan metoden fungerer. Ved andre og mer kompliserte problemer er metoden mer verdifull.

Prinsippet bak metoden er illustrert i figur 20, hvor x-aksen er delt opp i n intervaller med samme lengde $\lambda = L/n$. Funksjonsverdien til $w(x)$ i punktene x_{i-1}, x_i og x_{i+1} er henholdsvis $w(x_{i-1})$, $w(x_i)$ og $w(x_{i+1})$. For enkelthets skyld vil disse verdiene skrives w_{i-1}, w_i og w_{i+1}. Den deriverte til funksjonen i punktet $w_{i-1/2}$ kan tilnærmes ved funksjonsverdien i punktene x_{i-1} og x_i på følgende måte

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{i-1/2} \cong \frac{1}{\lambda}(w_i - w_{i-1}). \tag{2}$$

På samme måte kan vi finne en tilnærming for den deriverte i punktet $x_{i+1/2}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{i+1/2} \cong \frac{1}{\lambda}(w_{i+1} - w_i). \tag{3}$$



Figur 20: Grafen til funksjonen $w(x)$.

Den andrederiverte i punktet x_i kan uttrykkes ved den førstederiverte i punktene $x_{i-1/2}$ og $x_{i+1/2}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)_i \cong \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{i+1/2} - \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{i-1/2}\right]. \tag{4}$$

Innsetting av (2) og (3) i (4) gir

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)_i \cong \frac{1}{\lambda^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}). \tag{5}$$

Dersom vi også deler opp momentet på tilsvarende måte, kan vi skrive

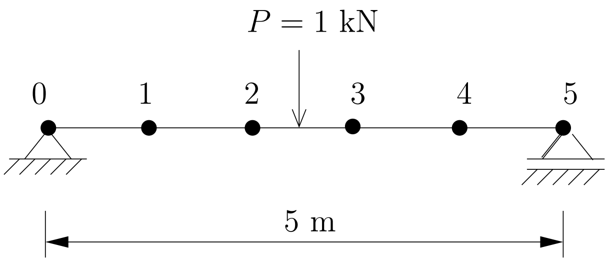
$$(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) \cong -\lambda^2 \frac{M_i}{EI}. \tag{6}$$

Deloppgave 1

I denne deloppgaven skal vi benytte differansemetoden til å beregne nedbøyningen til bjelken vist i figur 21. Punktene hvor nedbøyningen skal evalueres er indikert på figuren. Bjelkens tverrsnitt er kvadratisk med sidekanter på 100 mm og har en elastisitetsmodul på $E = 210\ 000\text{N/mm}^2$.

a) Benytt (6) til å stille opp ligninger for forskyvningen i punktene 1-4. Løs ligningene ved hjelp av Matlab og sammenlign svaret med eksakt løsning.

b) Finn nedbøyningen dersom punktlasten P erstattes med en jevnt fordelt last $q = 0.2$ kN/m $(= P/5\text{m})$. Sammenlign svaret med eksakt løsning.



Figur 21: Differansemetoden benyttet på en fritt opplagt bjelke.

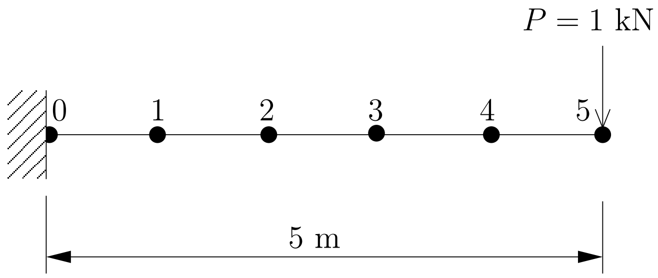
Deloppgave 2

I denne oppgaven skal differansemetoden benyttes på den utkragede bjelken vist i figur 22. Bjelkens tverrsnittsdimensjoner og materialegenskaper er som i deloppgave 1.

a) I deloppgave 1 slapp vi unna med å løse fire ligninger med fire ukjente. Stiller vi opp ligninger kun i punktene 1-4 for denne bjelken, ender vi opp med fire ligninger og fem ukjente. Forklar hvordan vi kan finne den siste nødvendige ligningen ved å evaluere punktet 0.

b) Løs ligningssettet og sammenlign løsningen med oppgave 18.

c) Finn nedbøyningen dersom lasten P erstattes med en jevnt fordelt last $q = 0.2$ kN/m $(= P/5\text{m})$. Sammenlign svaret med oppgave 18.



Figur 22: Differansemetoden benyttet på en utkraget bjelke.

Oppgave 20

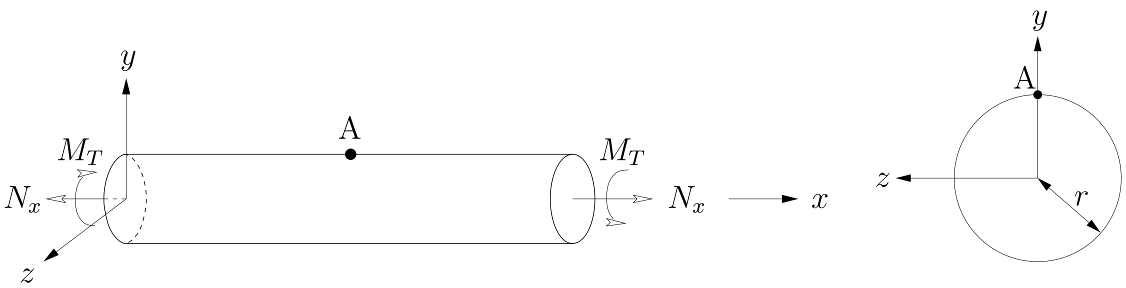
En massiv stav med sirkulært tverrsnitt er belastet med torsjonsmomentet M_T og aksialkraften N_x, se figur 23. Staven har en tverrsnittsradius på $r = 65$ mm.

a) Bestem koordinatspenningene (aksespenningene) ved punkt A når $N_x = 250$ kN og $M_T = 20$ kNm.

b) Bestem hovedspenningene (prinsipalspenningene) ved A og tilhørende retninger. Tegn opp et element som er orientert etter hovedspenningsretningene, og sett på spenninger.

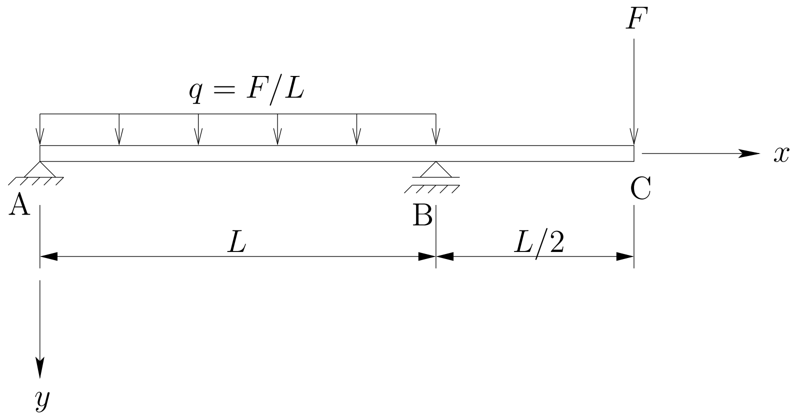
c) Bruk Matlab til å plotte Mohrs spenningssirkler for planene 12, 13 og 23, der 1, 2 og 3 er hovedspenningsretningene.

d) Benytt Trescas flytekriterium til å bestemme om flyt vil opptre noe sted i staven når flytespenningen er gitt ved $f_y = 100$ N/mm^2.



Figur 23: Sirkulær stav.

Oppgave 21



Figur 24: Bjelke ABC.

Figur 24 viser en bjelke ABC med lengde $3L/2 = 7.5$ m som er påvirket av en vertikal punktlast $F = 1.5$ kN i C. I tillegg virker en kontinuerlig fordelt last (pr. lengdeenhet) $q = F/L$ i området mellom A og B. Bjelken har kvadratisk tverrsnitt med bredde og høyde $b = h = 40$ mm, og den er av stål med elastisitetsmodul $E = 210\ 000 \mathrm{N/mm}^2$.

a) Beregn aksialkrefter (N), skjærkrefter (Q) og bøyemomenter (M) i bjelken ABC. Tegn opp tilhørende snittkraft- og momentdiagram med angivelse av retninger samt verdier i diagrammenes knekkpunkter.

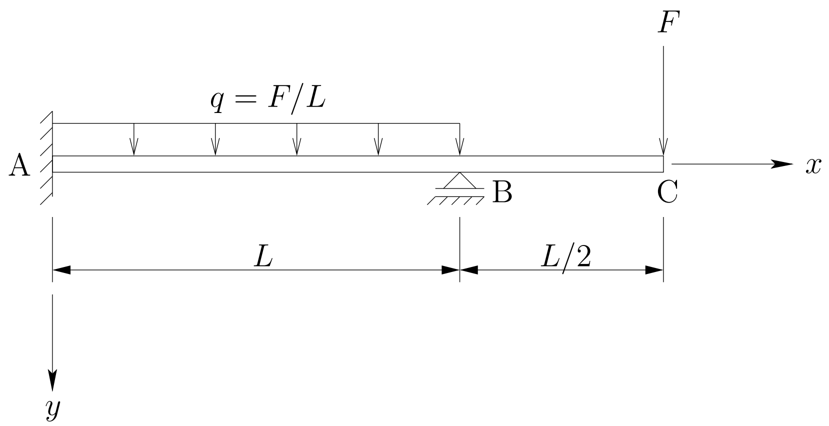
b) Bestem uttrykket for bøyelinjen (nedbøyningen) til bjelken. Skjærdeformasjoner skal ikke tas med i beregningene.

c) Bestem normalspenningen (σ_x) og skjærspenningen (τ_{xy}) som funksjoner av x og y, og benytt Matlab til å plotte spenningene (fargeplott over bjelkens utstrekning i xy-planet).

d) Bestem spenningen som inngår i Trescas flytekriterium som funksjon av x og y, og plott denne ved hjelp av Matlab.

Vi antar nå at bjelken er laget av stål som opp til flytespenningen gitt ved $f_y = 350$ MPa (flytespenningen betegnes også ofte med σ_Y) oppfører seg lineært elastisk.

e) Vil flyt opptre noe sted i bjelken (eventuelt hvor)?



Figur 25: Bortsett fra innspenningen i A er bjelken identisk med den vist i figur 24.

Figur 25 viser en bjelke som er fast innspent ved A. For øvrig er den identisk med bjelken i figur 24.

f) Bestem bøyemomentet som blir overført fra veggen på bjelken i A. Benytt gjerne resultater utledet tidligere.