UiO : Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

MEK2500

Faststoffmekanikk 5. forelesning

Spenning

Belastning på et legeme gir opphav til spenninger i legemets indre.

Spenning = kraft pr. flateenhet (N/mm^2 = MPa)

Spenning knyttes generelt til et punkt i legemet.

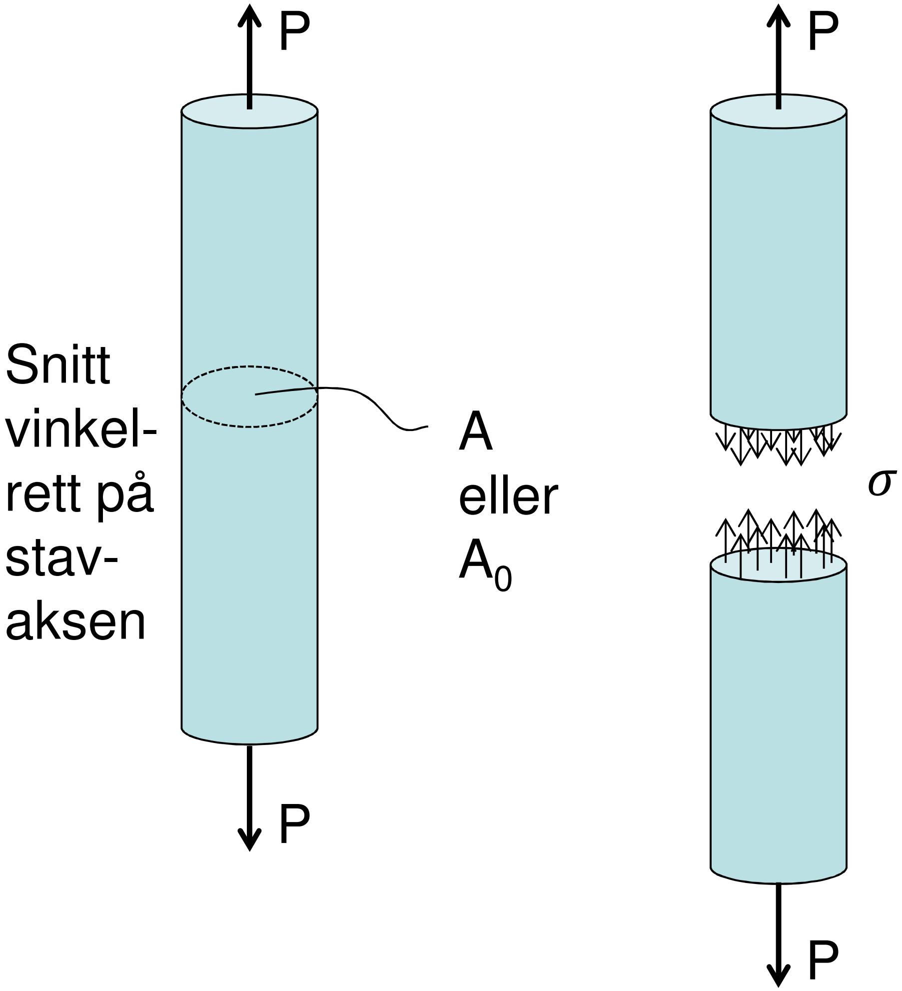
Spenninger angis i forhold til gitte snittflater gjennom punktet.

To typer spenninger

- Normalspenning σ virker vinkelrett på snittflaten gjennom punktet

- Skjærspenning τ virker parallelt med snittflaten gjennom punktet

Normalspenninger



Likevekt krever

$$\int_A \sigma dA - P = 0$$

Dersom vi antar at spenningen er lik I alle punkter får vi

$$\sigma \int_A dA - P = 0$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

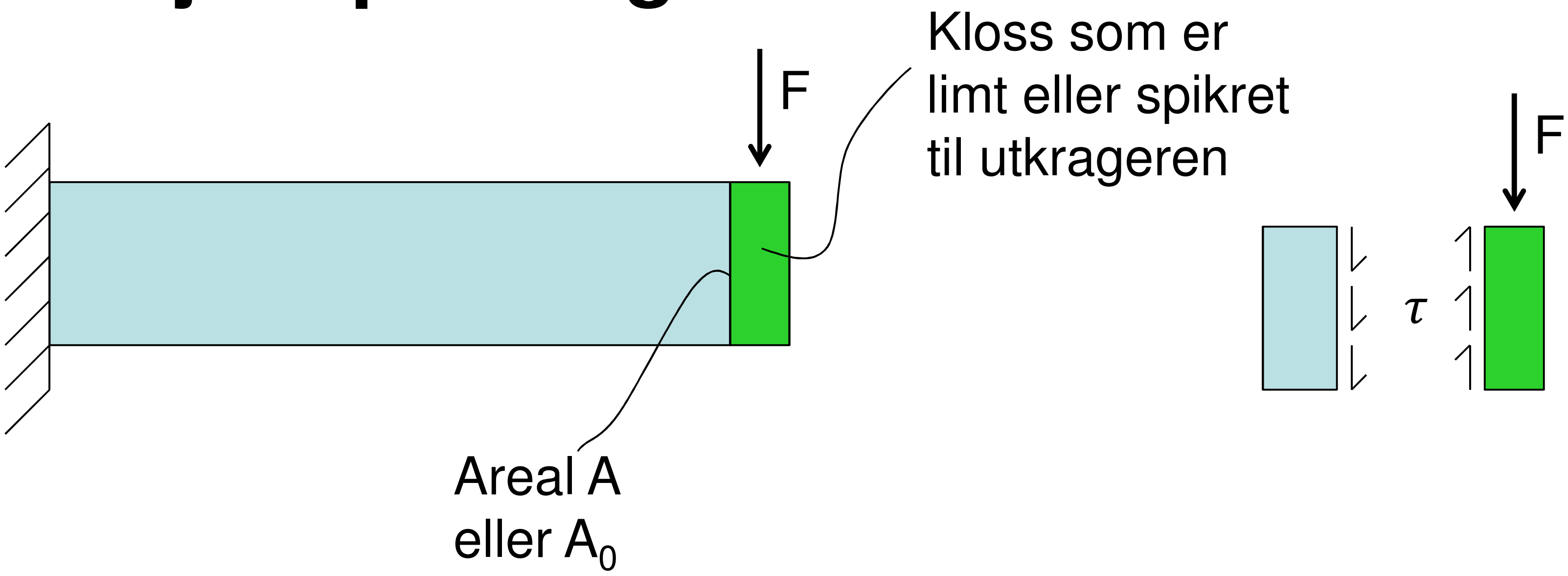
Spenninger kan ikke måles. Kraft og areal kan måles, og spenninger må avledes fra disse.

Arealet A avtar med økende strekk-kraft P

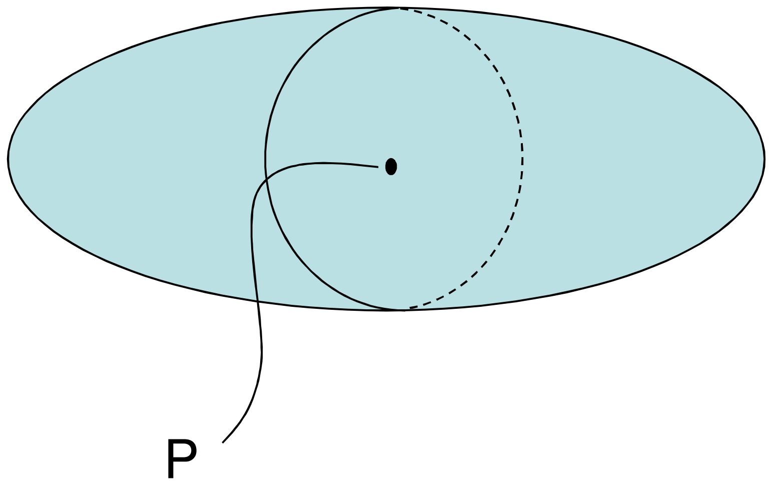
(eventuelt øker med økende trykkraft) Dette gir to mulige definisjoner av spenning.

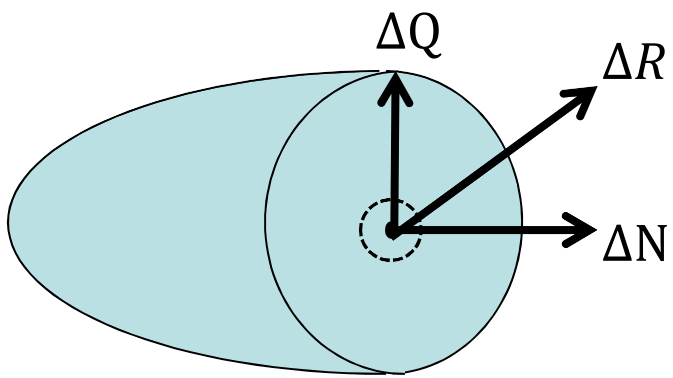
- Sann normalspenning $\sigma = \frac{N}{A}$ hvor A er virkelig (nåværende) areal.
- Nominell spenning (ingeniørspenning) $\sigma = \frac{N}{A_0}$ hvor A_0 er opprinnelig areal. Denne benyttes i dette faget.

Skjærspenning



Likevekt krever at gjennomsnittlig skjærkraft er lik kraft delt på areal. I motsetning til i staven i eksempelet på normalspenninger, så må skjærspenningene variere over høyden av bjelken. Dette kommer vi tilbake til senere.





Spenninger i pkt. P

Deler legemet i to deler med et tenkt snitt gjennom punktet.

Ser på krefter på delarealet ΔA rundt P.

ΔR er resultantkraften på arealet ΔA

Normalspenning i punktet

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \qquad \left(\frac{dN}{dA}\right)$$

Skjærspenning i punktet

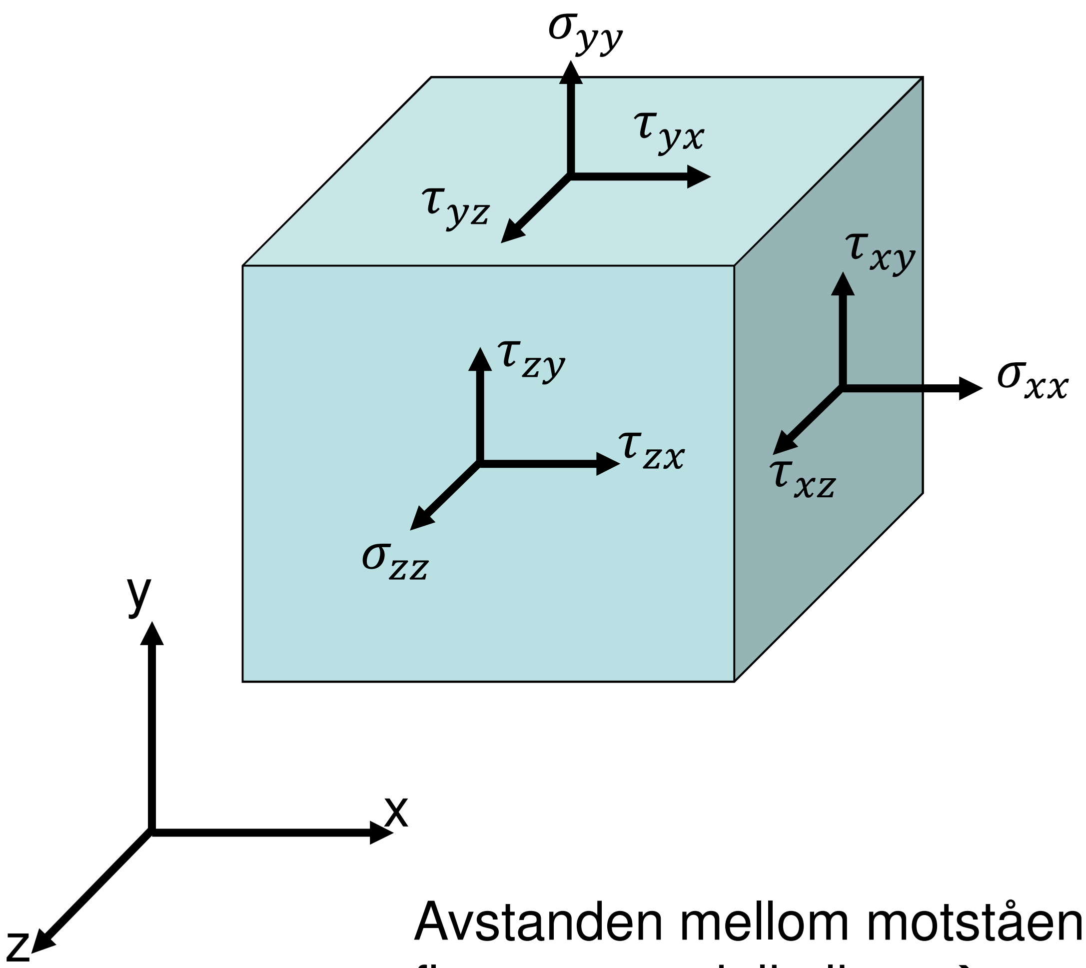
$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} \qquad \left(\frac{dQ}{dA}\right)$$

Koordinatspenninger

Spenninger i et punkt angis i forhold til en snittflate (et plan) gjennom punktet → spenningene er avhengige av snittflatens orientering.

Spenninger på snittflater (plan) orientert vinkelrett på koordinataksene kalles gjerne koordinatspenningene

Infinitesimalt materialelement



Første indeks angir retning til normalen på planet. (Alle spenninger på et plan har samme første-indeks)

Andre indeks angir retningen på spenningen.

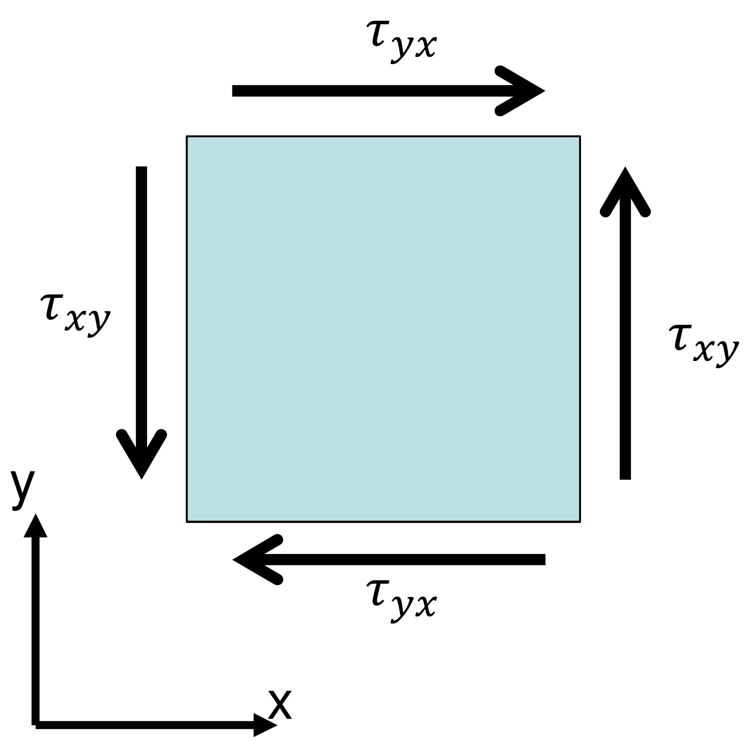
Positive spenninger når retning på normal og spenning har samme fortegn.

Forkorter ofte:

$$\sigma_{xx} = \sigma_x, \sigma_{yy} = \sigma_y, \sigma_{zz} = \sigma_z$$

Avstanden mellom motstående (parallelle) flater er uendelig liten → spenningene på parallelle flater er like store og motsatt rettet.

Skjærspenningenes parvise opptreden



Motstående skjærspenninger må være motsatt rettet og like store på grunn av kraftlikevekt.

Momentlikevekt gjør at $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ og at retningen er slik at di bidrar til moment i motsatt retning

Generelt

Spenningstilstanden i et punkt kan beskrives fullstendig med 6 spenningskomponenter, 3 normal- og 3 skjærspenninger

Disse kan ordnes i en spenningsvektor eller en spenningsmatrise

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

Hydrostatisk spenningstilstand

Normalspenningene er like i alle retningene og det er ingen skjærspenning

Eks. trykk mot legeme på stort havdyp.

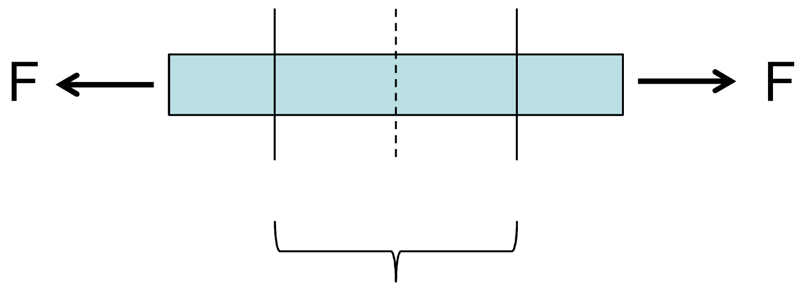
Statisk bestemte spenningssystemer

I noen tilfeller kan spenningene i et system bestemmes fra likevektslikningene alene.

(I noen tilfeller kan en tilnærmet løsning finnes)

Skal se på noen tilfeller som normalt innebærer akseptable forenklinger.

Aksialstav

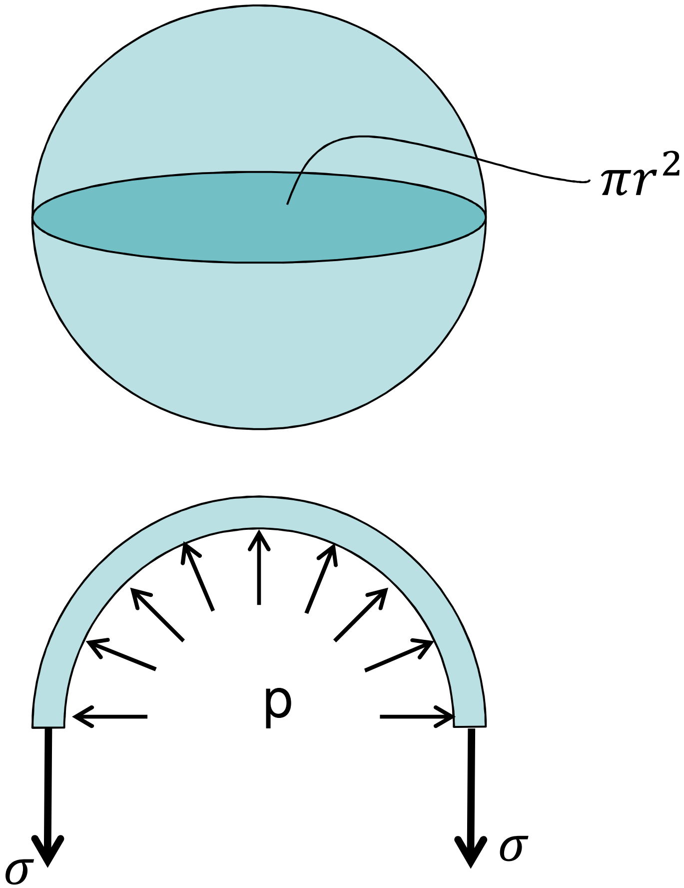


$$\sigma = \frac{F}{A}$$

En viss avstand fra lastangrepspunktet kan spenningen antas konstant.

Saint-Venants prinsipp: Forskjellen mellom effektene av to forskjellige men statisk ekvivalente laster blir ubetydelig ved en tilstrekkelig lang avstand fra lastens angrepspunkt.

Kuleskall med indre trykk

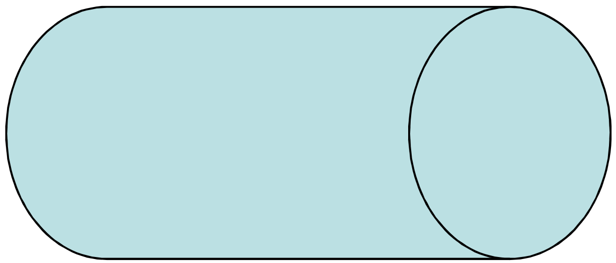


$$\sum F_y = 0$$

$$\pi r^2 p = 2\pi r t \sigma$$

$$\sigma = \frac{pr}{2t}$$

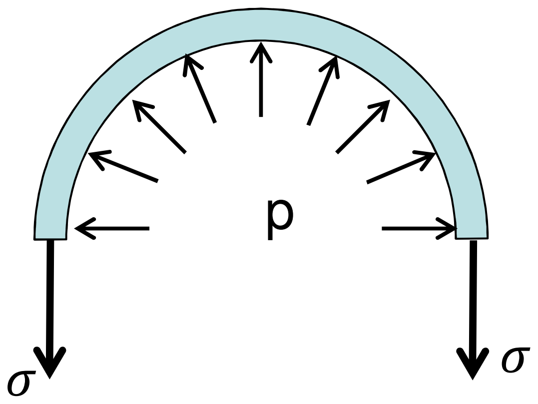
Tynnvegget rør med indre trykk



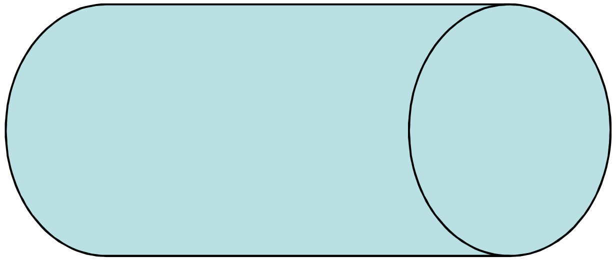
$$\sum F_y = 0$$

$$2rp = 2t\sigma$$

$$\sigma = \frac{pr}{t}$$



Tynnvegget sylinder (lukkede ender)



$$\sum F_x = 0$$

$$\pi r^2 p = 2\pi r t \sigma_x$$

$$\sigma_x = \frac{pr}{2t}$$