MEK2500

Pensum

- Chapter 1, (kursorisk)
- Chapter 6 – 11, 24
- Material from Appendix A, B, C, D as needed
- Additional material covered on lectures (TBD)

Timetable: (Tentative)

1. Aug 17 : Introductions, Background "test", Chap 1
2. Aug 24 : Chap 7: Strain I
3. Aug 31 : Chap 7: Strain II
4. Sep 7 : Chap 6: Stress I
5. Sep 14 : Chap 6: Stress II
6. Sep 21 : Chap 8 : Hooke's law I
7. Sep 28 : MID TERM WEEK (?) NO TEACHING
8. Oct 5 Chap 8: Hooke's law II
9. Oct 12 Chap 9 : Elastostatics I
10. Oct 19 Chap 9 : —"— II
11. Oct 26 Chap 10 : Rods
12. Nov 2 Chap 11 : Computational elastostatics.
13. Nov 9 Chap 24: Elastic vibrations
14. Nov 16 SPARE LECTURE
15. Nov 30 EXAM PREP. NO LECTURE. Q&A

Background questions :

Name (Optional) :

Aage (— II —) :

Courses I am taking this semester :

I am enrolled at the following study programme :

I have taken the following courses previously
(Please circle the corses you have passed).

x
x
x

When I grow up, I want to be:

... ...

Lecture 1: (1)

Overview:

- The continuum approximation and material particles.
- Coordinate systems for time and space (in particular the Cartesian coordinate system)
- Cartesian coordinate systems (Appendix B)
- Fields and field transformations (Appendix C)

—

Dette kurset dreier seg i all hovedsak om deformasjoner av faste legemer. Med fast legeme så mener jeg noe, si en gjenstand eller en bit med materiale, som ikke er en væske og ikke er en gass, men derimot et i ~~fast~~ ~~stoff~~ form. Faste legemer kommer med en innebygd hukommelse, hvis du klemmer på det, trykker det sammen, så vil de i større eller mindre grad returnere til original tilstanden hvis belastningen slutter. Væsker og gasser gjør typisk ikke det.

Spesielt så kommer vi i dette kurset til å fokusere på såkalte elastiske stoffer, disse er karakterisert ved at hvor mye materialet deformeres er proporsjonalt med spenningen i materialet eller spenningene materialet utsettes for. ~~Flere~~ Noen av

Suggestions for Exercises:

B.1

B.2 *

B.3

B.5

B.14 *

B.17

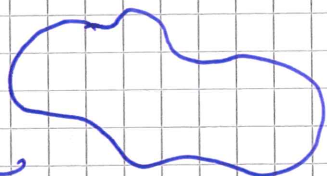
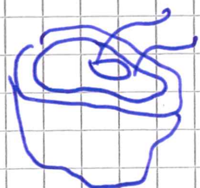
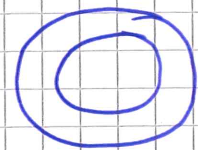
1.4

C.1

C.4 *

dere husker og kjenner kanskje Hooke's lov fra tidligere kurs eller videregående fysikk, den kommer vi til å jobbe mye med her...

Så la oss si at vi har et slikt legeme (på engelsk kalles dette "a body"), det kan være f.eks.

- en bjelke 
- en båt  eller
- noe figurativt. 
- et hjerte eller annet organ 
- et hjul 

NB: La meg på forhånd advare dere om at jeg ikke har gått på kunstakademiet og at det er en grunn til det.

Løst sagt, gjennom hele dette kurset så kommer vi til å stille spørsmålene

(1) • Hvordan kan vi beskrive deformasjoner og krefter som virker i legemet?

(2) Gitt en belastning på et legeme, hvordan vil det deformeres?

(3) Gitt en deformasjon av et legeme, hvilke krefter virker i og på legemet?

KONTINUUMSHYPOTESEN

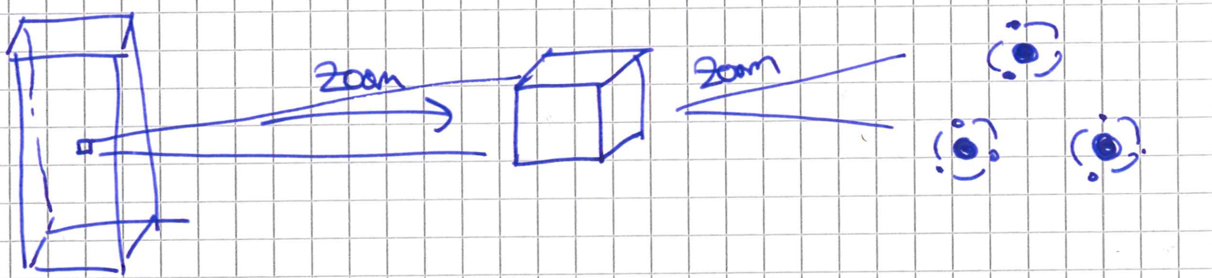
Vi kommer til å angripe disse spørsmålene (3)
fra et kontinuumsperspektiv. Og dette perspektivet
gjør at årets kurs skiller seg i en viss grad
fra hvordan dette kurset har blitt holdt i tidligere
år. ~~Fordelen er~~ ~~Tilgjengjeld~~ Spesielt så knytter vi da dette
kurset mye tettere opp til kontinuumsmekanikk generelt,
fluidmekanikk og også differensialligningskurse.

Q: Så hva mener jeg med et kontinuumsperspektiv?

A: Vi ~~betra~~ ser på et fast stoff som et kontinuerlig
medium eller et kontinuum. Med det mener vi
at materialet eller stoffet er kontinuerlig (eller
løst sagt: helt jevnt) fordelt i dets utstrekning.
Uansett hvor store eller små deler vi ser på
av materialet, så inneholder hver del stoff.
Vi vil gjøre denne antagelsen, for jo, det er jo klart
en antagelse, og dette kalles kontinuumshypotesen.

To ord for samme begrep.

Tenk på dette på følgende måte, se for deg et homogent
fysisk objekt, for eksempel en ~~g~~ bit plast



Ser du på den på litt avstand, så ser du bare
noe ganske jevnt, spesielt ujevn tomrom.

(4)

Og så kan du zoome litt inn, kanskje chippe du et bit og du har fortsatt bare et jevnt materiale som du ikke ser noe mikrostruktur i. Men si så at du zoomer helt inn på si molekylnivå, da er bildet et helt annet. Da har du jo plutselig egentlig svært lite masse og svært mye tomrom. Innenfor kontinuumshypotesen så betrakter man altså denne mikrostrukturen, men zoomer aldri så langt inn. Det betyr også at det vi ser på bare er gyldig ned til en viss grad av zoom, eller mer presist, ned til en viss lengdeskala.

—

Hvert punkt i vårt gitte legemet kalles en partikkel eller material partikkel ("material particle"). (Vi kaller elementær-partikler og lignende for fysiske partikler ved behov.). Matematisk sett beskriver vi dette som et punkt i tid-rom eventuelt bare i rom, men husk at vi tenker på dette fortsatt som et punkt av et helt jevnt materiale, spesielt at en material partikkel består av et utall fysiske partikler.

—

Så da har vi snakket om kontinuumshypotesen og material partikler. Spørsmål?

KOORDINATSYSTEMER

(5)

Som sagt i dette kurset kommer vi til å fokusere på hvordan faste legemer påkjennes og deformerer seg i tid og rom. For å i det hele tatt gi mening til dette så trenger vi en referanseramme, en ramme for hvert problem vi kommer til å se på som vi kan bruke for å gi mening og fikse objekter.

Spesielt så vil referanserammer vår referere til

- Tid (s)
- Rom (m)

Vi antar, for enkelhet og relevansens skyld, at vi har full kontroll på disse og tar ikke hensyn til måleusikkerheter eller andre variasjoner.

Matematisk perspektiv:

Tid: Vi antar at tiden t er gitt som et reelt tall: $t \in \mathbb{R}$.

Rom: Vi antar at vårt legeme $\mathcal{B}$, på et gitt tidspunkt t opptar et område

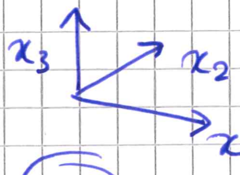
$$\Omega \subset \mathbb{R}^3$$

~~NB: Vi bruk~~

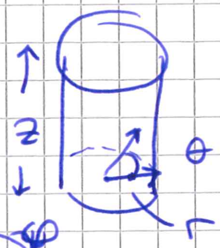
For konkret å snakke om $\mathcal{B}$'s utstrekning trenger vi en referanseramme og spesifikt et koordinatsystem for å referere til og gi mening til koordinatene i $\mathcal{B}$.

Vi kommer til å bruke flere koordinatsystemer,
spesielt:

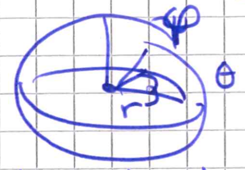
Ex 1(A) Kartesiske koordinater



Eks 2(B) Cylinder koordinater

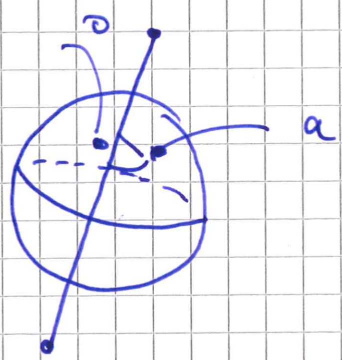


Eks3 (C) Sphere/Sfære/Kule koordinater



med fokus på Kartesiske koordinater.

Eks 4) "Earth coordinates"



Elevation

$$a = (\delta, \lambda, h)$$

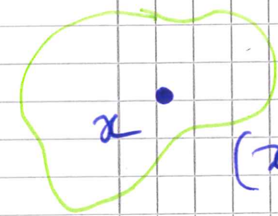
Latitude Longitude

With reference to "origo" (Greenwich, UK)
~~or~~ and (signed) height over gjennomsnittlig sjølinje.

OK, så nå har vi sett på koordinatsystemer generelt og visse egenskaper de må oppfylle. La oss nå dypdykke inn i Kartesiske koordinater, da det er de vi helt klart kommer til å bruke mest. Samtidig kjører vi et lite oppfriskningskurs i vektorregning.

Gitt et koordinatsystem, så ~~for~~ sier vi at posisjonen til en partikkel i det koordinatsystemet er gitt ved et sett koordinater. I vår fysiske verden, eller i den matematiske $\mathbb{R}^3$, så er dette da gitt ved 3 tall:

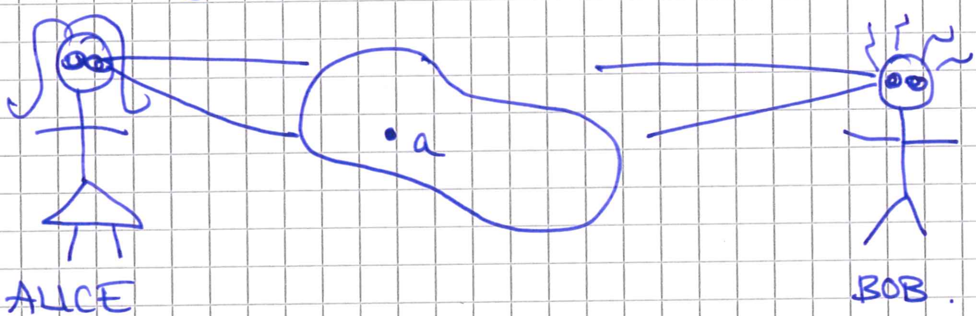
Tuple



$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_i \in \mathbb{R} \text{ for } i = 1,2,3.$$

For at vi skal kunne snakke om posisjoner etc på en fornuftig måte (i boken "physical reality is unique"), så må man kunne knytte sammen forskjellige koordinatsystemer. Hva mener jeg med dette, jo: Si at du har en virkelighet som du ønsker å beskrive ved to forskjellige koordinatsystemer.



$$x = (x_1, x_2, x_3) \qquad x' = (x_1', x_2', x_3')$$

Krav til koordinatsystemer:

Gitt to koordinatsystemer og et punkt a med koordinater $x = (x_1, x_2, x_3)$ i det ene og $x' = (x_1', x_2', x_3')$ i det andre, så må det eksistere en ~~un~~ entydig, bijektiv mapping f fra det ene til det andre:

NB: Vektorligning:

$$x' = f(x)$$

$$f = (f_1, f_2, f_3)$$

$$x_1' = f_1(x_1, x_2, x_3)$$
$$x_2' = f_2(x_1, x_2, x_3)$$
$$x_3' = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

Merk at f er et såkalt vektor felt i 3 variable. (Mer om dette senere.)

Entydig betyr at hvis vi har disse to koordinat systemene og hvis vi har at

$$x' = f(x) \quad \text{og} \quad x' = g(x)$$

$$\Longrightarrow \quad f \equiv g$$

Bijektiv betyr en-til-en og på.

$$f(x) = x' = \underset{\substack{\parallel \\ f(y)}}{y'} \Longrightarrow x = y$$

For alle x' så finnes en x s.a $f(x) = x'$

Lengde:

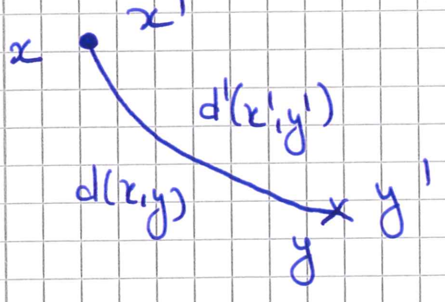
Ethvert koordinatsystem må være utstyrt med et lengdemål. (Den eksplisitte formelen for en lengde gitt ved koordinatene varierer fra koordinat system til koordinatsystem. Vi kommer tilbake til eksempler på dette.)

Distanse:

Distansen mellom to punkter a og b er definert som lengden av avstanden mellom dem: $d(a,b)$
den korteste

Gitt to koordinat systemer S og S' ~~med~~ og to punkter, x,y og x',y' og to distancemål d, d'
med koordinater
så må

$$d(x,y) = d'(x',y')$$



Def: Geodesic: Korteste vei mellom to punkter.

Dette betyr at gitt et koordinatsystem og lengdemål, så kan man beregne ~~lengder~~ i et annet koordinatsystem
distanser
via mappingen mellom systemene.

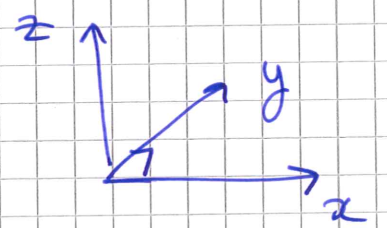
Kartesiske koordinater spesifiseres som et 3-tuppel

$$a = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$

$\cdot a$

~~Det~~ Kartesiske koordinat system spesifiseres med referanse til et punkt O origo og tre basis vektorer

$$e_x = (1,0,0)$$
$$e_y = (0,1,0)$$
$$e_z = (0,0,1)$$



Et hvert punkt a kan skrives som en linear kombinasjon (dette er nettopp definisjonen av en basis for et rom) av basis vektorene:

$$a = x \cdot e_x + y \cdot e_y + z \cdot e_z$$

Basisvektorene e_x, e_y, e_z er av norm ~~1~~ lengde 1:

~~$\|e_x\|$~~

Def Kartesisk lengde:

$$|a| = |(x,y,z)| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

Ex 1: $|e_x| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = \sqrt{1} = 1.$

og tilsvarende for $|e_y| = |e_z| = 1.$

Basisvektorene er orthogonale:

Def orthogonal:

Vektorene a, b er orthogonale hvis

$$a \cdot b = 0$$

~~Ex1:~~ ~~$e_x \cdot e_y$~~ **Def indreproduktet i $\mathbb{R}^3$:**

~~Det pro~~ Indreproduktet er definert som

$a = (a_1, a_2, a_3)$ $b = (b_1, b_2, b_3)$

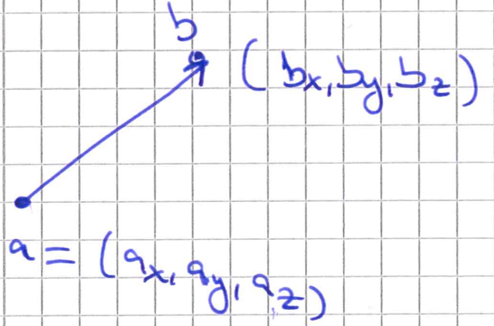
$$a \cdot b = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \longleftarrow \in \mathbb{R}$$

Ex2:

$$e_x \cdot e_y = (1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

og tilsvarende for $e_y \cdot e_z$ og $e_z \cdot e_x$

Hvis vi har to punkter a og b gitt ved Kartesiske koordinater, så vil vektoren mellom dem



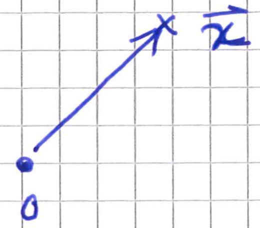
$$b - a = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$$

angi korteste vei mellom punktene og avstanden mellom a og b ~~er~~ gitt ved

$$d(a,b) = |b - a| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

NB:

Merk at vi både skriver $\mathbf{x}$ for posisjonen $\mathbf{x}$ og vektoren fra origo til x.
(Dette identifikasjonen mellom posisjon og posisjonsvektor fungerer flott i Kartesiske koordinatsystemer, men ikke nødvendigvis i andre).



Linære operasjoner med vektorer:

- Gange med en skalar

$$a = (a_x, a_y, a_z) \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$ka = (ka_x, ka_y, ka_z)$$

- Legge sammen vektorer:

$$a = (a_x, a_y, a_z) \qquad b = (b_x, b_y, b_z)$$

$$a + b = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Def: Ytre eller kryssproduktet:

$$a = (a_x, a_y, a_z), \quad b = (b_x, b_y, b_z)$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z \cdot b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x . \end{pmatrix}$$

Kartesiske

Enkle koordinattransformasjoner

Eksempel 1: Translasjon

$$o' = (o_x, o_y, o_z)$$

$$(x', y', z') = (x - o_x, y - o_y, z - o_z)$$

$$a' = a - o'$$

Eksempel 2: Rotasjon

Rotasjon om z-aksen med vinkel θ er gitt ved

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$z' = z$$

lineær

Generelt så kan enhver trasformasjon ~~st~~ skrives som

$$x' = A(x - c)$$

for en 3×3 matrise A og 3-vektor c.

FELTTEORI (1.6 + Appendix C)

14

Feltteori (Fields)

Innenfor kontinuumshypotesen så representerer vi materialpartikler som punkter x og "alle" fysiske egenskaper ved dem og krefter som virker på dem ved funksjoner av (tid) og rom:

Def: Et felt f er en reell funksjon av romlige variable x og tiden t.

$$f = f(x,t) = f(x_1, x_2, x_3, t)$$

Eksempler på felter vi kommer til å møte:

Ex1: Forskyvning (Deformation)

Vektorfelt

$$u = u(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_2(\text{—} \; " \; \text{—}) \\ u_3(\text{—} \; " \; \text{—}) \end{pmatrix}$$

Ex2: Hastighet (Velocity) ← Vektorfelt

$$v = v(x,t) = \begin{pmatrix} v_1(x,t) \\ v_2(x,t) \\ v_3(x,t) \end{pmatrix}$$

Ex3: Tyngdekraft (Gravity)

$$g = g(x,t)$$ ← (Skalar) felt.

Ex4: Elastisitet (Elasticity) ← — " —

$$\mu = \mu(x,t)$$

Deriverte av skalar og vektorfelt:

Husk at hvis du har en funksjon av flere variable

$$f = f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$$

Så tar vi partiell deriverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cancel{=} \cancel{f_0} = \lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_1 + h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)|}{|h|}$$

og tilsvarende for $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ og $\frac{\partial f}{\partial x_3}$.

Vi skriver

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \longleftarrow \text{"nabla"} = \frac{\partial}{\partial x}$$

Gradient:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \longleftarrow \text{"grad } f\text{"}$$

Divergens:

Hvis u er et vektorfelt, så er divergensen av u et skalarfelt definert som

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} = \mathrm{div}(u).$$

Curl:

Hvis u er et vektorfelt så er curl av u og et vektorfelt definert ved

$$\nabla \times u = \dots$$

(Se regel for kryss produkt)

Exercise for the reader...

- Kjøp seigmenn