

Lecture 10: Slender Rods / Tynne staver

26.10.2015

NB: Noen antar at stav \equiv kun aksialkrefter; Djelke kan ta opp andre momenter etc.

- 9.6 (Undamped pipe + Thin-wall approximation)
- Kap 10.1-10.3 Staver: Bøyning/ Kneking
- Fortsetter med Kap 10 neste gang

Kap 11 i token utgår fra pensum — istedet vil Tomod følelse om fagverk neste mandag. Det er også temet for Oblig 5 (programmering.)

Oversikt

- (1) Repetisjon fra Førelsnig (9)
- (2) 9.6: Undamped pipe / thin-wall approximation
- (3) 10.1 : Bøyning av en stav
- (4) 10.2 : Ustabiliteter og kneking (Buckling)
- (5) 10.3: Store bøyninger)

NB: Buckling \equiv Kneking Plate \equiv Platte
 Deflection \equiv (Forskyvning) Nedbøyning

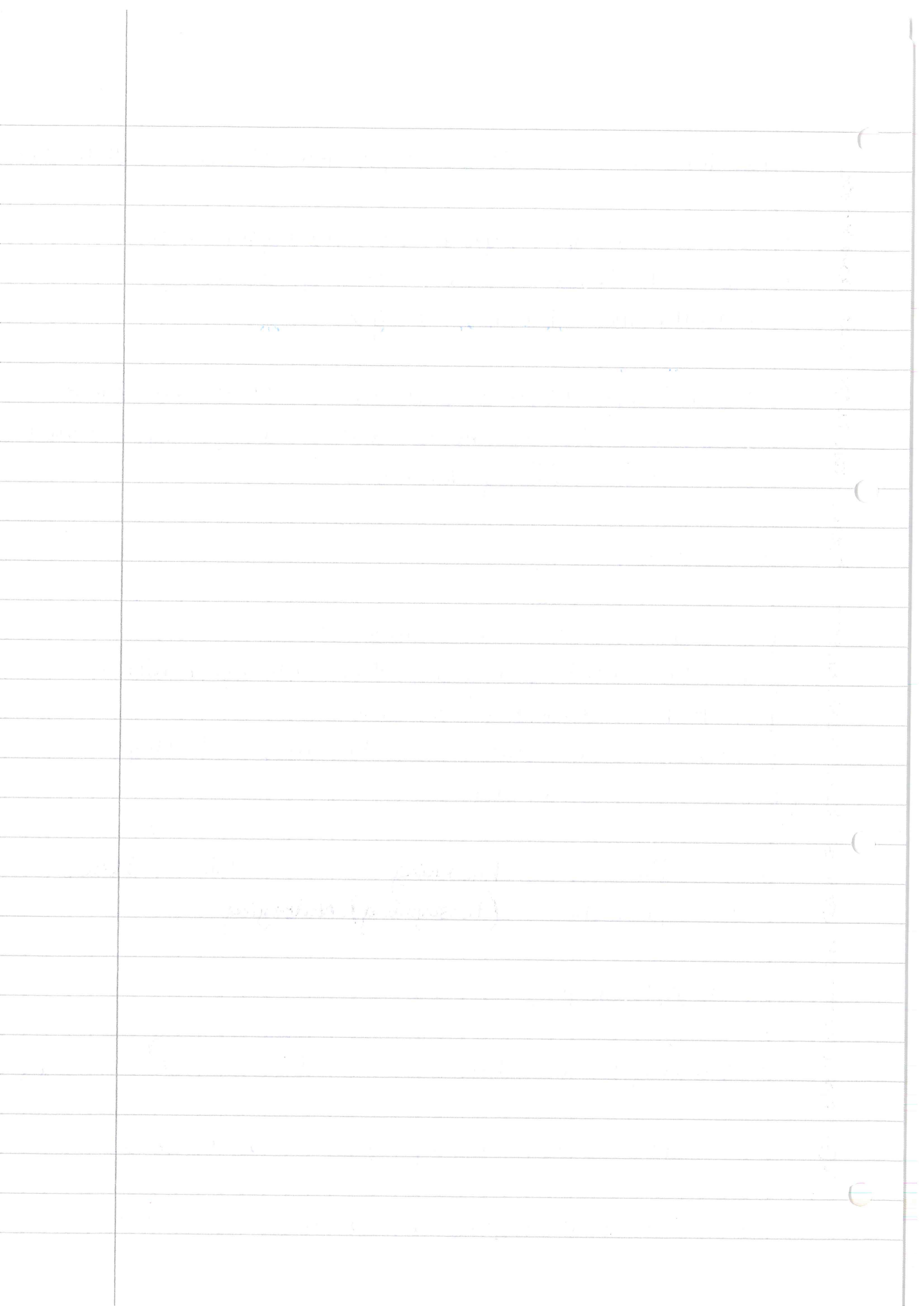
(1) REPETISJON FRA L9:

- Vridning av en stav



$$u = \tau x_3 (-x_2, x_1, 0) = \tau x_2 e_3 \times x$$

med tilhørende tøyninger og spenninger gitt ved Hooke's lov



Handwritten text in the middle of the page, possibly a signature or a note, written in light pencil.

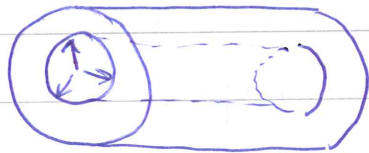
(2)

- Vi definerer dreiemomentet i et tverrsnitt M_t :

$$M_t = \int_A (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_3)_3 dA$$

- og så på Coulomb-Saint Venant's lov: $M_t = \mu \tau J$
den elastiske
- og energien $E_A = \frac{1}{2} \mu \tau^2 J_A$

- Vi fortsatte med å se på rør under (indre) trykk P



$$\vec{e}_r = (x_1, x_2, 0) \frac{1}{r}$$

- Vi så på løsningen $u = u_r(r) \vec{e}_r$ der \vec{e}_r er (basis)vektor i radiell retning, og så at

$$u_r(r) = (1+\nu) \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left((1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right) \frac{P}{E}$$

tilfredsstiller likevekt gitt et indre trykk $+P$ i radiell retning.

- For spenninger \rightarrow se p.14 fra L9.

SUPERPOSISJONSPRINSIPPET:

(Anta sakte-varierende trykninger og små deformasjoner.)
Siden likevektslikningene for lineært elastiske materialer er lineære, så kan vi "legge sammen løsninger når vi legger sammen krefter".

Mer presist, hvis u_1 løser $*$ med $f = f_1$ og u_2 løser $*$

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{tr} \varepsilon_{\#} \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon_{\#}) = f_{\#} \quad (*)$$

$$\varepsilon_{\#} = \frac{1}{2}(\nabla u_{\#} + \nabla u_{\#}^T)$$

med $f = f_2$, så vil $(u_1 + u_2)$ løse $*$ med $f = f_1 + f_2$.
Dette kalles superposisjonsprinsippet.

SAINT-VENANT'S PRINSIPP:

Deformasjonen gitt ved en lokal ekstern kraft med forsvinnende (null) total kraft og totalt kraftmoment vil være begrenset i utstrekning av kraftens utstrekning.

(NB: Generelt bens av St-Venant's prinsipp mangler!)

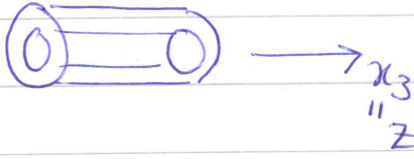
9.6+ Sammen trekning av rør under trykk

Vi har vist at spenning i x_3 -retning blir

$$\sigma_{zz} = 2\nu \frac{a^2}{b^2 - a^2} P = Q$$

hva slags sammen trekning får vi i/av et rør?

Anta at det virker en kraft Q i x_3 -retning i tverrsnitt av røret, da får vi:



$$\tilde{u}_z = x_3 \cdot \frac{Q}{E} \quad \tilde{u}_r = -\nu r \frac{Q}{E}$$

($u = \{u_r e_r + u_\phi e_\phi + u_z e_z\}$) \rightarrow Se 8.3!

Braker superposisjonsprinsippet til at

$$u_r = +\hat{u}_r + \tilde{u}_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left((1-\nu)r + (1+\nu)\frac{b^2}{r} \right) \frac{P}{E}$$

la:

$$\begin{cases} \tilde{u}_r = -\nu \frac{rQ}{E} = -\nu r \cdot 2\nu \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{P}{E} \\ \hat{u}_r(r) = (1+\nu) \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left((1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right) \frac{P}{E} \end{cases}$$

der $(1+\nu)(1-2\nu) = 1 - 2\nu + \nu - 2\nu^2 = 1 - \nu - 2\nu^2$

$\hat{u}_r = u_r + \tilde{u}_r$ } Forskyvning uten forskyvning i lengde-retning
 lik forskyvning i "begge retninger"

$$u_z = \frac{a^2}{b^2 - a^2} z \cdot \frac{P}{E}$$

$$(\hat{u}_z = u_z + \tilde{u}_z \Rightarrow u_z = \hat{u}_z - \tilde{u}_z = 0 - \tilde{u}_z = -\tilde{u}_z)$$

$$\left[(1-v)r + (1+v) \frac{a^2 + 2ad}{r} \right]$$

$$\approx (1-v)(a+sd) + (1+v) \frac{a^2 + 2ad}{(a+sd)}$$

$$= \left((1-v)(a+sd)^2 + (1+v)(a^2 + 2ad) \right) (a+sd)^{-1}$$

$$\approx \left((1-v)(a^2 + 2asd) + (1+v)(a^2 + 2ad) \right) (a+sd)^{-1}$$

$$= \left(\underbrace{a^2 + 2asd} - \cancel{va^2} - \cancel{2asd v} + \underbrace{a^2 + 2ad} + \cancel{va^2} + \cancel{2adv} \right)$$

$$= \left(2a^2 + 2ad(s+1-sv+v) \right) (a+sd)^{-1}$$

$$\approx \frac{2a^2}{a\left(\frac{1}{a} + \frac{sd}{a}\right)} + \frac{2ad}{a\left(1 + \frac{sd}{a}\right)} (1+s+v-sv) \sim 2a$$

~~$$\approx \frac{a}{2d} \left(\frac{(1-v)r^2 + (1+v)(a^2 + 2ad)}{r} \right) \frac{P}{E}$$~~

~~$$\approx \frac{a}{2d} \left(\frac{(1-v)(a^2 + 2asd) + (1+v)(a^2 + 2ad)}{a+sd} \right) \frac{P}{E}$$~~

~~$$= \frac{a}{2d} \left[\frac{(a^2 + 2asd) - v(a^2 + 2asd) + v(a^2 + 2ad)}{a+sd} \right] \frac{P}{E}$$~~

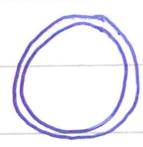
~~$$= \frac{a}{2d} \left[\frac{a^2 + 2a(1+s)d + 2ad(-sv+v)}{a+sd} \right] \frac{P}{E}$$~~

~~$$= \frac{a}{2d} \left[a^2 \right]$$~~

Kan regne ut og finne (event. bruke superposisjonsprinsippet) at σ_{rr} og $\sigma_{\theta\theta}$ er som for "clamped pipe" mens de lengde ~~spenningene~~ (σ_{zz}) = 0 spenningene i lengde-retnung ($\sigma_{zz} = 0$) forsvinner

Thin-wall approximation / Tynn-vegg tilnærming:

Hva skjer når $a \rightarrow b$?



Vel, da vil alle termer som $\frac{a^2}{b^2 - a^2} \rightarrow \infty$ og uttrykkene ser oss ikke så mye...

Introduser vegg tykkelsen $d = b - a \ll a$, og la $r = a + sd$ der $0 \leq s \leq 1$. Da vil

$$u_r \sim a \frac{a}{d} \frac{P}{E} \quad \text{og} \quad u_z \sim -z \nu \frac{a}{d} \frac{P}{E}$$

Ser dette via:

$$u_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left((1 - \nu)r + (1 + \nu) \frac{b^2}{r} \right) \frac{P}{E}$$

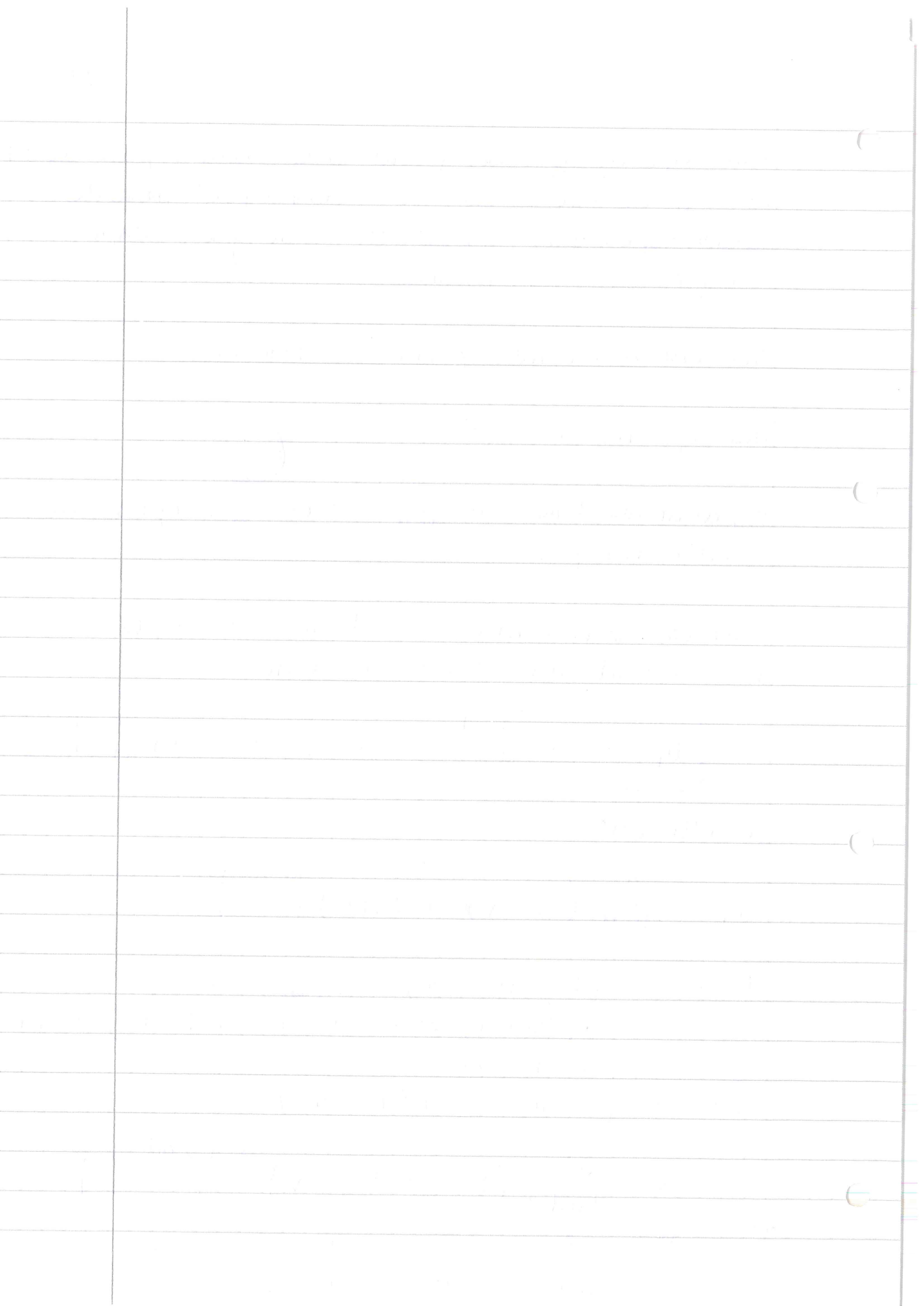
$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = d(2a + d) = 2ad + \mathcal{O}(d^2) \sim 2ad$$

$$b^2 \sim a^2 + 2ad$$

$$r^2 = (a + sd)^2 \sim a^2 + 2asd$$

$$\sim \frac{a^2}{2ad} \left((1 - \nu)r + (1 + \nu) \frac{a^2 + 2ad}{r} \right) \frac{P}{E}$$

← (*)
$$\sim \frac{a^2}{2ad} \cdot 2a \cdot \frac{P}{E} \sim \frac{a^2}{d} \cdot \frac{P}{E}$$



Trykningene blir:

$$\epsilon_{rr} \sim -\nu \frac{a}{d} \frac{P}{E}$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} \sim \frac{a}{d} \frac{P}{E}$$

$$\epsilon_{zz} \sim -\nu \frac{a}{d} \frac{P}{E}$$

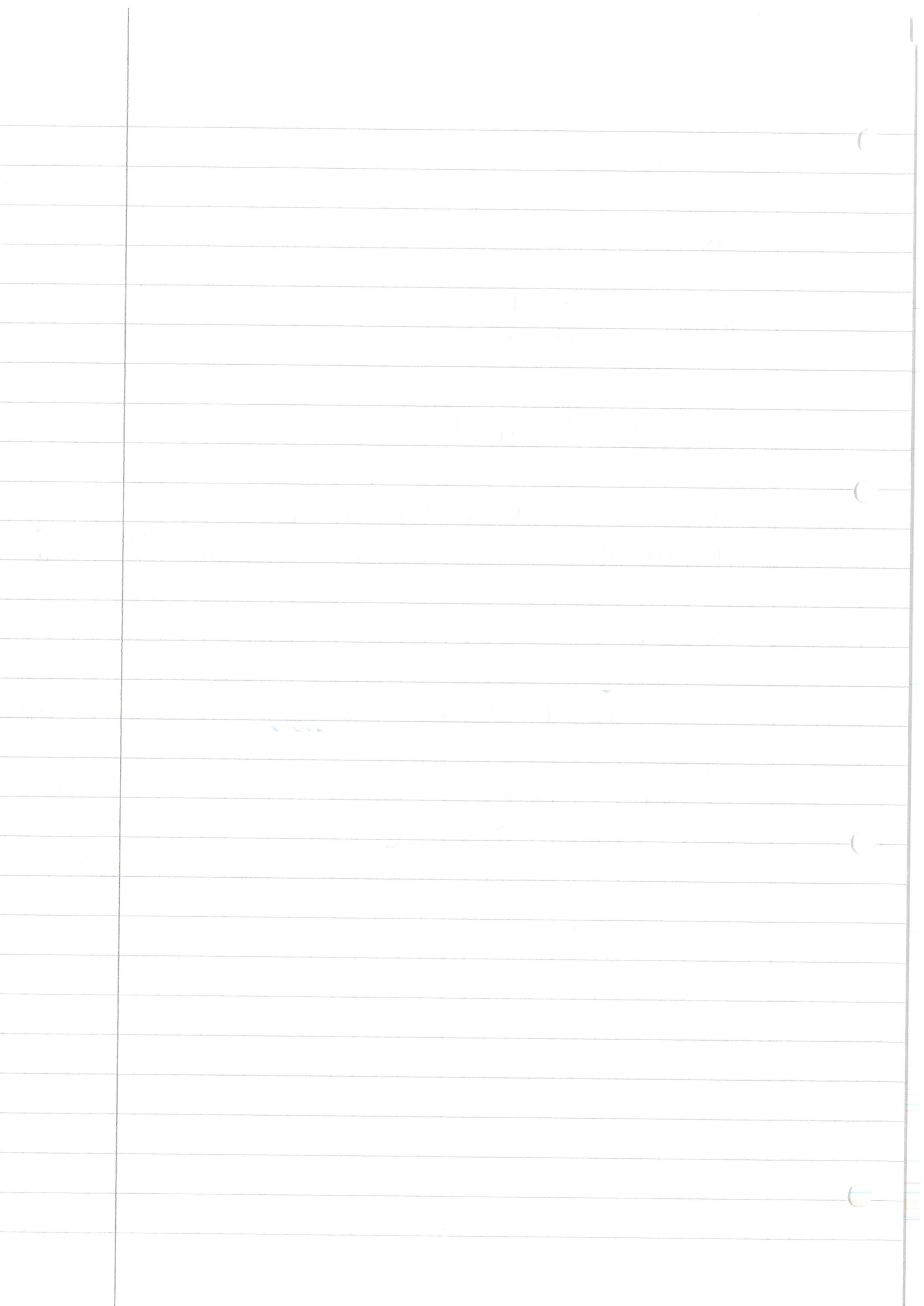
Når $d \rightarrow 0$ så vil $u \rightarrow \infty$ og $\epsilon \rightarrow \infty$,
 så for at $\|\epsilon\| \ll 1$ (small strains) så må $P/E \ll \frac{d}{a}$

Spenningene blir

$$\sigma_{rr} \sim -(1-\nu)P \quad \in (-P, 0) \text{ for } s \in (0,1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} \sim \frac{a}{d} P \quad \rightarrow \infty \text{ nær } d \rightarrow 0$$

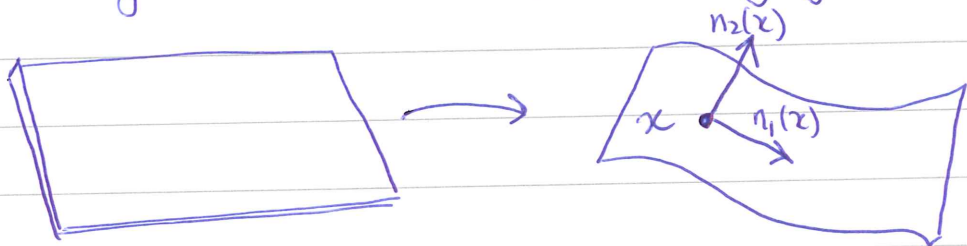
↑ Risiko faktor for "blow-up"



Kapittel 10: Tynne staver

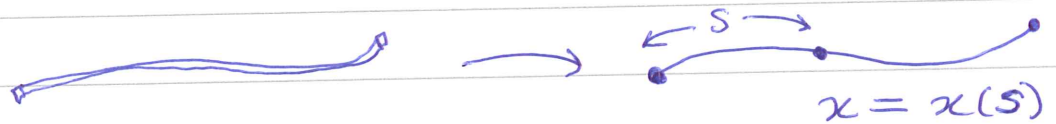
Tidligere så har vi sett på legemer som her sammenlignbare størrelser i alle dimensjoner. Hva om legemets utstrekning i en eller to av retningene er mye mindre enn de/ den andre? Hva slags forenklinger kan vi da gjøre?

- Et 3D legeme der en dimensjon er negligibel \rightarrow 2D

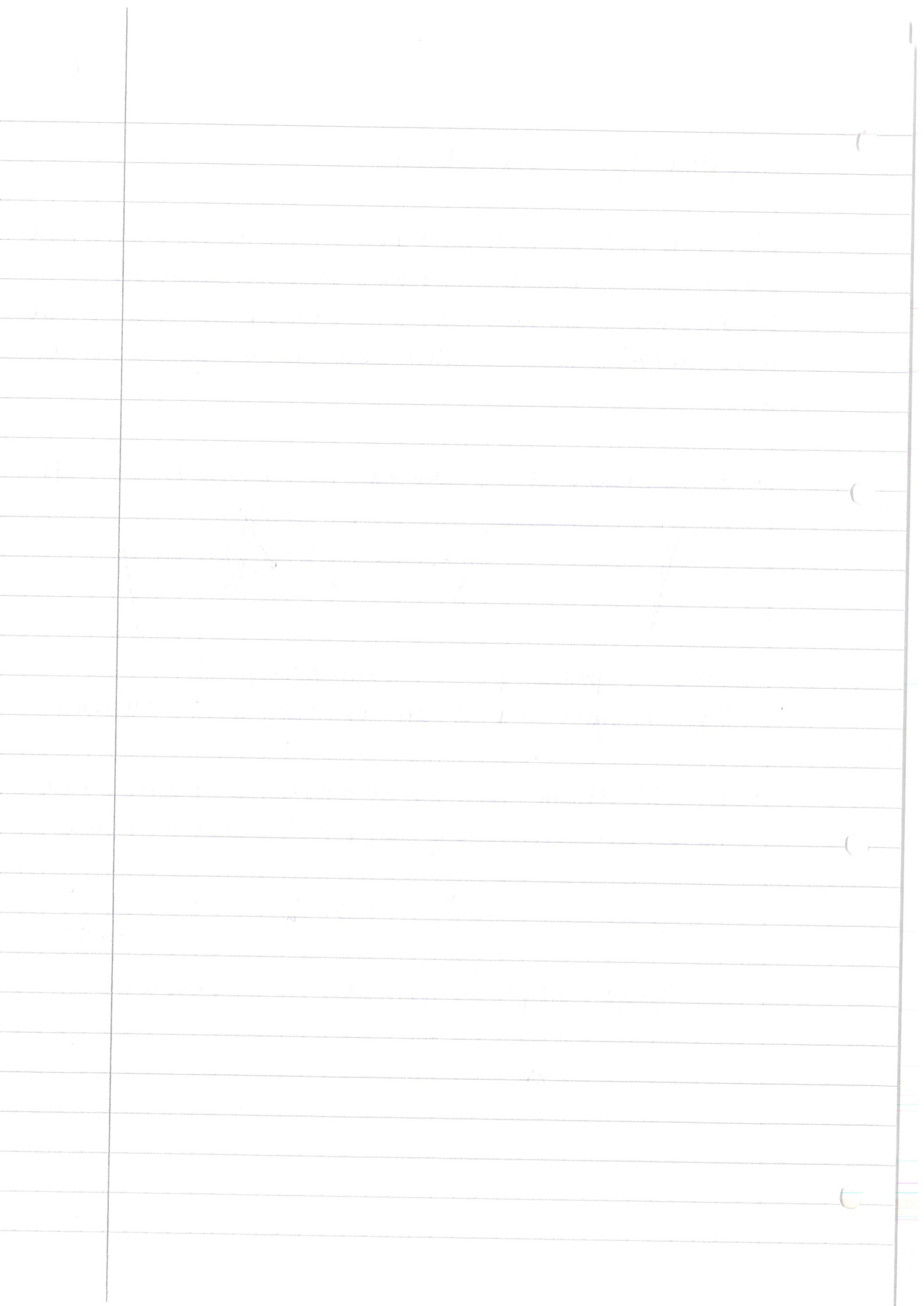


kalles en plate og (eng: plate)
 kan beskrives som en 2D-overflate (2 vektorfelt)

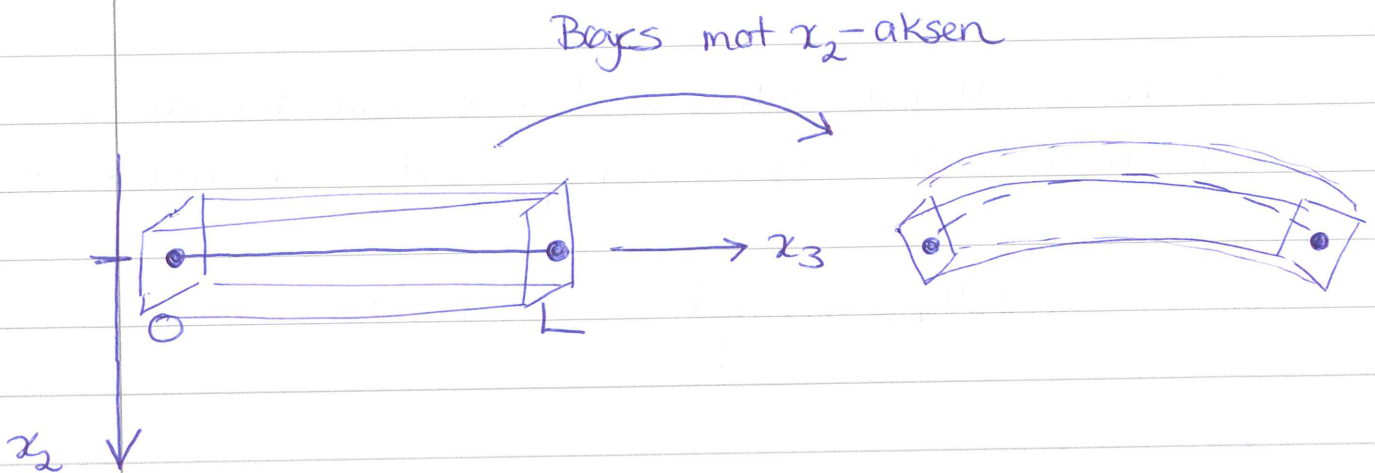
- Et 3D legeme der to dimensjoner er negligibere kalles en stav (eng: rod) og kan beskrives som



en kurve v. hj. a en parameter s (kurvelengde).



10.1 Små bøyninger (uten rotasjon)



Anta at du har en bjelke plassert med lengderetning i x_3 -aksen og med tverrsnitt alignert i x_1 og x_2 -retning og at det virker en kraft i x_2 - x_3 planet (og event momenter kun i x_1 -retning), slik at bjelken bøyes som skissert.

La senterlinjen i bjelken (gitt ved x_3) ha en forskyvning i x_2 -retning:

$$y = u_2(x_3) = y(x_3)$$

Denne kalles deflection og er den vi er interessert i å finne.

Vi antar at $\left| \frac{dy}{dx_3} \right| \ll 1$. Det betyr at \leftarrow sakte-varierende forskyvninger.

$$\max y \leq \left| \frac{dy}{dx_3} \right| \max x_3 \leq \left| \frac{dy}{dx_3} \right| L \ll L$$

Så y vil være mye mindre enn lengden på bjelken.

Vi har tidligere sett på link mellom moment og radius for bjelkebøyning: Euler-Bernoullis lov

$$|M_x| = \frac{EI}{R} = EI\kappa$$

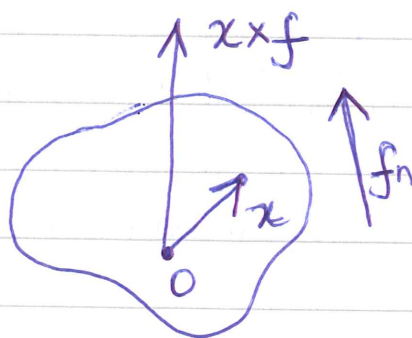
Nå ønsker vi å relatere moment til ytre krefter og momenter og krumning til forskyvning!

Husk Newtonsk mekanikk: for partikler med posisjon x_n

* Summen av krefter $F = \sum_n f_n = 0$
er null i likevekt

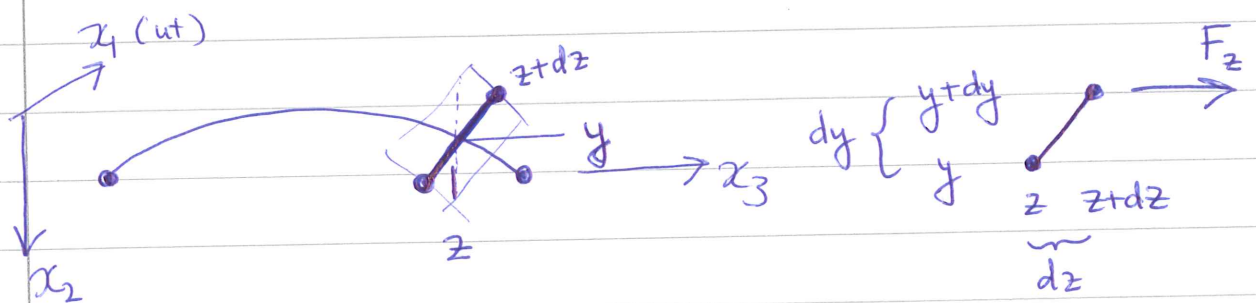
* Summen av ^{kratt} momenter $M = \sum_n x_n \times f_n$
er null i likevekt

Likevekt \iff Summen av krefter og
Summen av kraftmomenter forsvinner (0).



Balanse av kraft og moment:

Anta at vi tar et tverrsnitt ved $x_3 = z$



I likevekt har vi at

$$(1) F_y(z+dz) - F_y(z) + K_y(z) dz = 0$$

$$(2) F_z(z+dz) - F_z(z) + K_z(z) dz = 0$$

(3) All forces vanish / nothing happens i x_1 -retning.

$$\frac{dF_y(z)}{dz} \sim \frac{F_y(z+dz) - F_y(z)}{dz} = -K_y(z)$$

$$\frac{dF_z(z)}{dz} = -K_z(z)$$

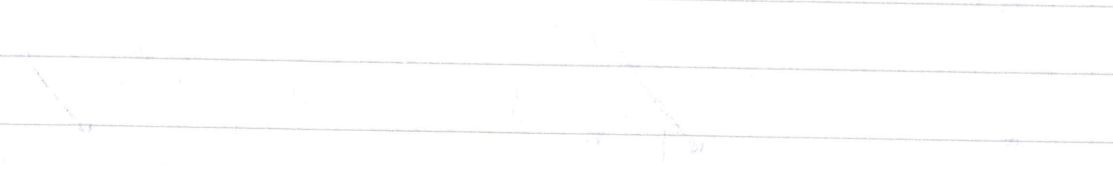
Totale momentet rundt senter ved z må forsvinne for eknilibrium:

$$0 = M_x(z+dz) - M_x(z) + F_z(z) dy - F_y(z) dz$$

$$\frac{dM_x}{dz} \sim \frac{M_x(z+dz) - M_x(z)}{dz} = F_y(z) - F_z \frac{dy}{dz}$$

1. The first part of the problem is to find the area of the triangle.

2. The second part is to find the perimeter of the triangle.



3. The area of the triangle is given by the formula $A = \frac{1}{2}bh$.

4. The perimeter of the triangle is the sum of the lengths of the three sides.

5. The perimeter is given by the formula $P = a + b + c$.

6. The area of the triangle is $A = \frac{1}{2}bh$.

7. The perimeter of the triangle is $P = a + b + c$.

8. The area of the triangle is $A = \frac{1}{2}bh$.

9. The perimeter of the triangle is $P = a + b + c$.

10. The area of the triangle is $A = \frac{1}{2}bh$.

11. The perimeter of the triangle is $P = a + b + c$.

12. The area of the triangle is $A = \frac{1}{2}bh$.

13. The perimeter of the triangle is $P = a + b + c$.

9

Anta $F_z \frac{dy}{dz} \sim 0$ (og $F_z = 0$)

Da får vi ligningene, gitt volumkraft K_y

$$K_y = - \frac{dF_y}{dz}$$

$$F_y = \frac{dM_x}{dz}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dz^2}$$

$$M_x \approx - \frac{EI}{R} = -EI \kappa = -EI \frac{d^2 y}{dz^2}$$

som vi kan løse for transversal defleksjon y .

Vi kan kombinere ligningene til å bli:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[(EI) \frac{d^2 y}{dz^2} \right] = K_y$$

Dette er en 4de-ordens differensialligning som beskriver forskyvningen $y(z)$ som en funksjon av lengden z av søtølingen i bjelken, gitt krefter K_y i transversal retning.

1. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$
 $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3}$
 $= -\frac{2}{x^3}$

2. $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$
 $\frac{d}{dx} x^{-3} = -3x^{-4}$
 $= -\frac{3}{x^4}$

3. $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$
 $\frac{d}{dx} x^{-4} = -4x^{-5}$
 $= -\frac{4}{x^5}$

4. $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$
 $\frac{d}{dx} x^{-5} = -5x^{-6}$
 $= -\frac{5}{x^6}$

5. $\frac{1}{x^6} = x^{-6}$
 $\frac{d}{dx} x^{-6} = -6x^{-7}$
 $= -\frac{6}{x^7}$

Eksempel:

Anta at bjelken/staven har tverrsnitt A (konstant langs x_3), konstant EI og konstant tetthet ρ .

Anta at det virker en tyngdekraft

$$K_y = K = \rho A g_0$$

og $K_z = 0$



Bøyligningen er da

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} = \rho A g_0 = K \quad \text{(BL)}$$

Med løsning:

$$y(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + \frac{K}{24 EI} z^4$$

Spesiell

Trenger 4 xtra betingelser for å finne en løsning! (randbetingelser)

Eksempel 1: Cantilever beam / utlagret bjelke under egen vekt:



(Dirichlet)

Neumann

$$y(z=0) = y'(z=0) = 0$$

$$F_y(z=L) = M_x(z=L) = 0$$

↓

$$F_y \approx y''' (= 0) \text{ i } L$$

$$M_x \approx y'' (= 0) \text{ i } L$$

$$y(z) = \frac{k}{24EI} z^2(z^2 - 4Lz + 6L^2)$$

$$y'(z) = \frac{k}{24EI} (4z^3 - 12Lz^2 + 12L^2z)$$

$$y''(z) = \frac{k}{24EI} (12z^2 - 24Lz + 12L^2)$$

$$y'''(z) = \frac{k}{24EI} (24z - 24L)$$

$$y''''(z) = \frac{k}{24EI} 24 = \frac{k}{EI} \quad \checkmark$$

Sjekk randbetingelsene:

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$y'''(L) = \frac{k}{24EI} (24L - 24L) = 0$$

$$(y''''(L) = \frac{k}{24EI} 24 = \frac{k}{EI})$$

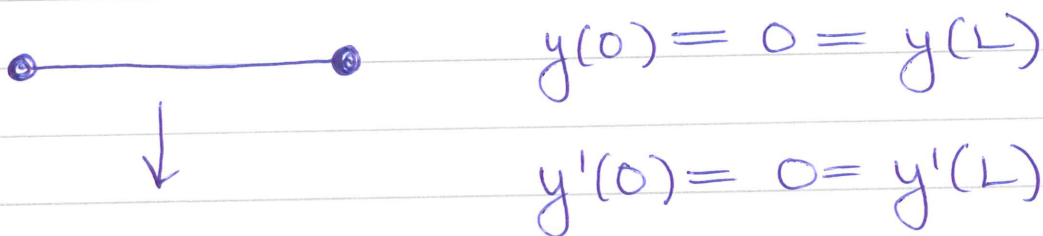
$$y''(L) = \frac{k}{24EI} (12L^2 - 24L^2 + 12L^2) = 0$$

Med løsning $y(z) = \frac{K}{24EI} z^2(z^2 - 4Lz + 6L^2)$

Oppgave: (10 + 5 min)

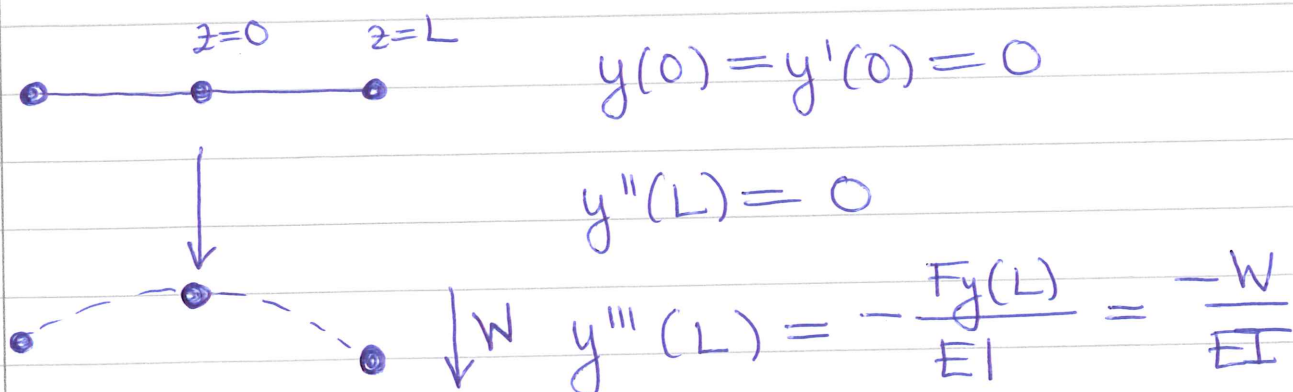
- (i) Sjekk at y gitt over løser \textcircled{BL} med utlager randbetingelsene
- (ii) hva blir maksimal forskyvning?

Eksempel 2: Bro med hengslede ender

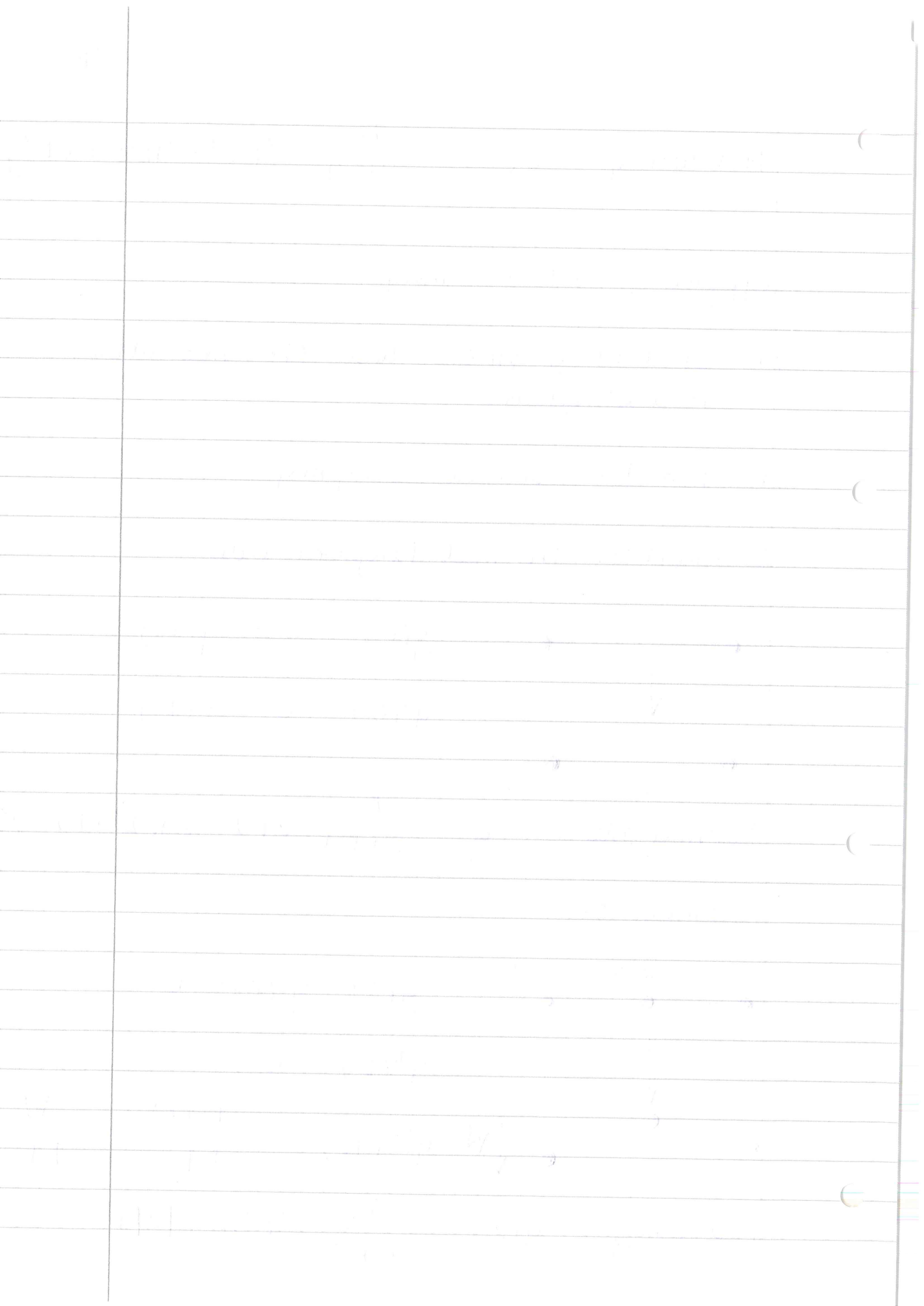


Løsning blir: $y = \frac{K}{24EI} z(L-z)(L^2 + Lz - z^2)$

Eksempel 3:

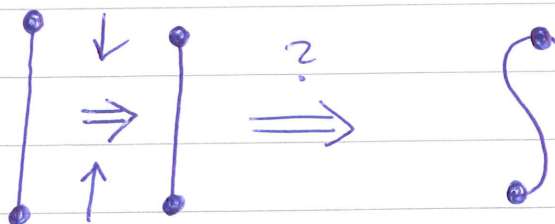


Med løsning $y(z) = \frac{W}{6EI} z^2(3L - |z|)$



10.2 Kneknung

Kneknung (Buckling) er et ikke-lineær ustabilitet



Anta at du har en stav som du trykker sammen i lengderetningen. Fenomen som skjer når kreftene på staven når en viss grense. Vi spør når (altså hva er grensen?)

Tenk på dette i 5 min!

Husk (se p.8):

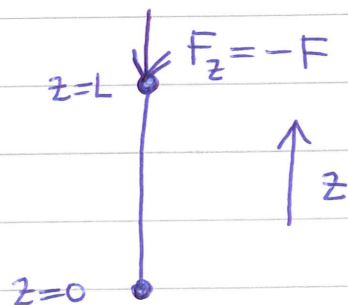
$$\frac{dF_y}{dz} = -K_y(z)$$

$$\frac{dF_z}{dz} = -K_z(z)$$

Anta at $K_y = K_z = 0$ slik at $F_y(z) = C_y$ og $F_z(z) = C_z$ er konstante langs staven. Anta at $F_y = 0$ for enkelhet's skyld og så at

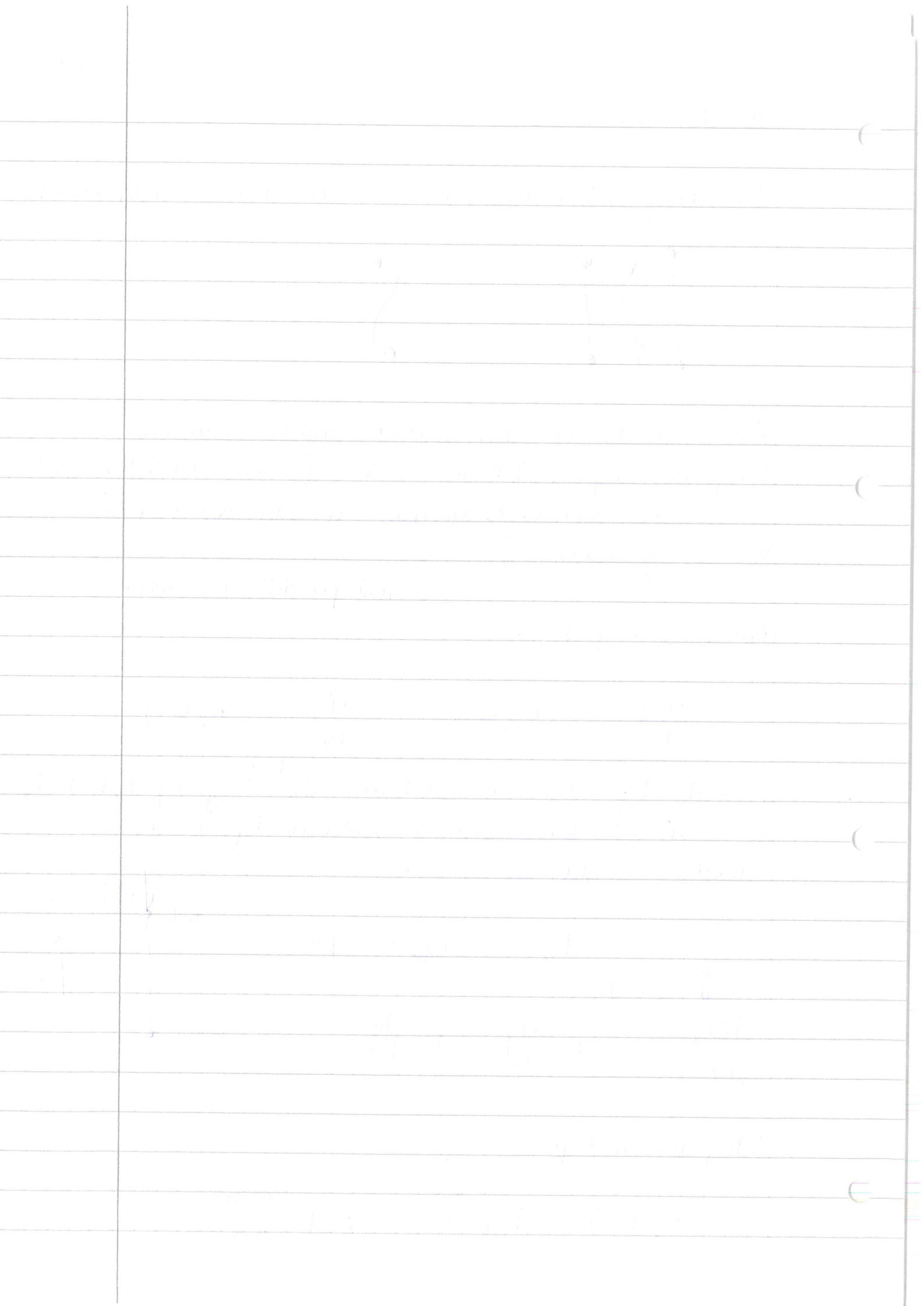
$$\Downarrow \text{(p.8)} \quad F_z = -C_z = -F$$

$$\frac{dM_x}{dz} = -F_z \frac{dy}{dz} = F \frac{dy}{dz}$$



Integrerer m.h.p z og får

$$M_x(z) = F_y \stackrel{\text{p.9}}{=} -EI \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$



Med andre ord så får vi ligningen

$$EI y''(z) = -Fy$$

Intont moment

Ekstern moment

la $k^2 = \frac{F}{EI} \quad y'' = -ky$

Løsningen er:

$$y(z) = A \sin kz + B \cos kz$$

Legg på randbetingelser $y(0) = y(L) = 0$:

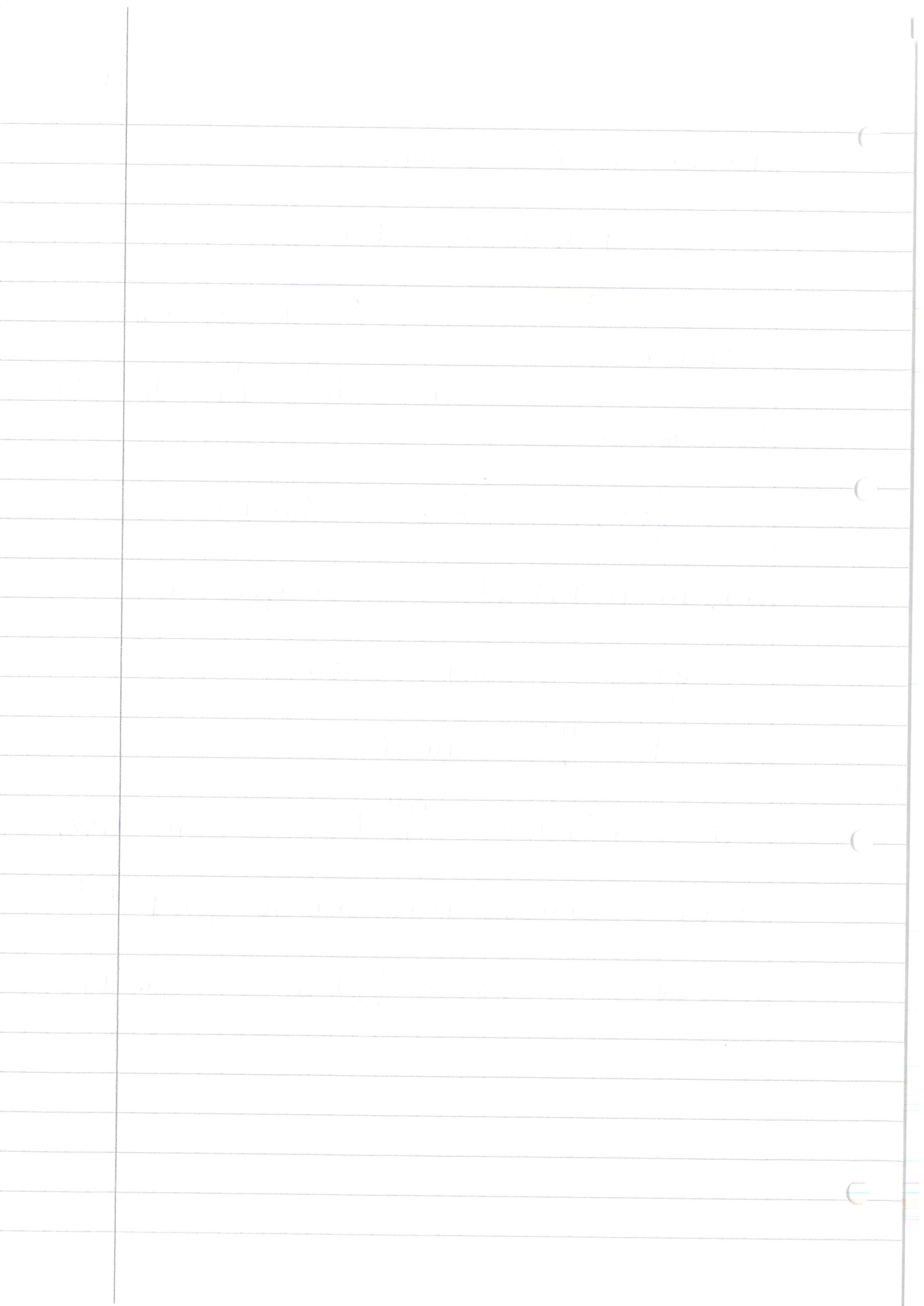
$$y(z) = A \sin kz \quad \text{løsninger.}$$

der $k = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{Z}$

$$F = k^2 EI = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Så disse løsningene finnes bare for gitte F !?!

Euler grensen: $F = \frac{\pi^2}{L^2} EI \quad (n=1)$



Hvorfor dukker knekningsløsningene opp?

Stabilitetsanalyse

Anta at staven har blitt komprimert til lengde L og la oss bøye den litt slik at senterlinjen er beskrevet av $y = y(z)$.

Dette krever arbeid W :

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} EI \int_0^L y''(z)^2 dz}_{\text{Bøyeenergi}} \quad \neq \quad \underbrace{\frac{1}{2} F \int_0^L y'(z)^2 dz}_{\text{Kompresjonsenergi}}$$

Bøyeenergi se 9.3 p.150

Kompresjonsenergi se utledning p.168.

$$E = \int \frac{1}{2EI} M^2 dx$$

Så lenge $W > 0$ så kreves det arbeid for å endre tilstand ($F=0$, $W > 0$).

Men hvis $W < 0$ for en gitt F , så vil det utløse energi (få arbeid) ved en deformasjon y !

Siden kompresjonsstørrelse er lineær i F , så vil det være en minst F_c , kritisk F , som gjør at det tipper over, hvilken y er slik at W blir minst for gitt F ?

Det blir

$$y = A \sin kz = A \sin \left(\frac{n\pi}{L} z \right)$$

Sett $y = \dots$ inn i W :

$$W = \frac{n^2 \pi^2 A^2}{4L} (n^2 F_E - F)$$

der F_E er den såkalte Euler grensen

$$F_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Før $F < F_E$, så vil $W > 0 \forall n$, så den udeformerte bjelken er stabil.

Den minste verdien av F der $W(F) = 0$ er $n=1$ og $F = F_E$ er kritisk grense. Da vil forskyningene y vokse uten å kreve energi/arbeid!

Oppgaver 10.1, 10.5

Handwritten notes in the top section of the page, including a heading and several lines of text.

Handwritten notes in the middle section of the page, continuing the text from the top section.

Handwritten notes in the bottom section of the page, including a heading and several lines of text.



