MEK2500 - likevektslære (statikk)

Tormod Landet

Høst 2015

Mange konstruksjoner kan analyseres med tre enkle prinsipper

1. Saint-Venants prinsipp
2. Balanse i krefter
3. Balanse i momenter

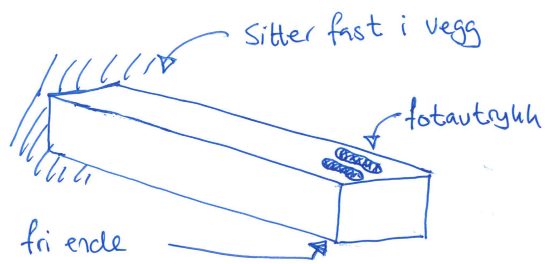
Denne forelesningen går først og fremst på de to siste prinsippene (likevektslæren) og hvordan disse enkle prinsippene kan gjøre oss i stand til å finne krefter og momenter i et vilkårlig snitt gjennom en konstruksjon. Vi kan så bruke det vi har lært om spenninger i bjelker og staver til å regne ut spenningene på en hver plass i konstruksjonen.

Spenningene vi finner vil ikke være eksakte, fordi vi må forenkle grensebetingelsene med Saint-Venants prinsipp, men de vil gjerne være gode nok til veldig mange formål.

Innhold

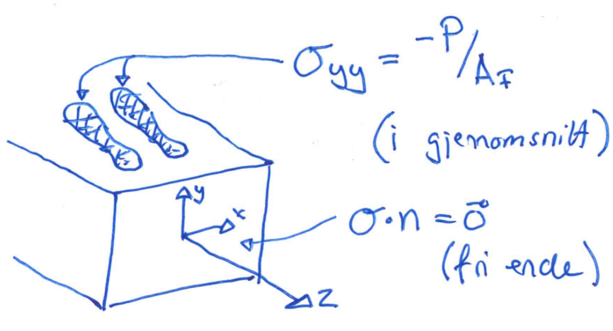
1 Saint-Venants prinsipp

La oss begynne med å se på en bjelke som er fast innspent i en ende (sitter bom fast i en vegg), og helt fri i en ende (bare luft rundt). Det stiller seg en person nært den frie enden som bøyer bjelken litt ned. Vi antar *liten nedbøyning* slik at vi ikke skiller mellom geometrien til bjelken før og etter at personen stiller seg oppå den.



De ekte grensebetingelsene relatert til vekten av personen er at spenningen i bjelken der skoene treffer bjelken, i dette tilfellet $\sigma \cdot \mathbf{n}$ der $\mathbf{n}$ peker oppover (i y-retningen), blir lik trykket under skoene skapt an vekten av personen. På den frie enden er det ingen spenninger (vi antar at det ikke er noe vind som røsker i bjelken vår).

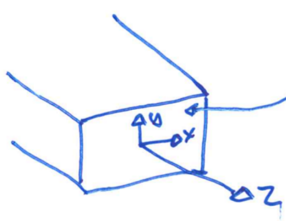
La oss kalle vekten av personen P og arealet under føttene A_F. Vi får tilnærmet noe slikt som tegnet under som de ekte randbetingelsene (vi diskuterer ikke om personen står på hælene eller på tærne men antar at vekten er noenlunde jevnt fordelt):



Til nå har vi ikke forenklet noe annet enn å anta at personens vekt er jevnt fordelt på fotavtrykksarealet. Hvis vi har et litt avansert fastoffmekanikk-dataprogram så kan vi regne på bjelken med grensebetingelsene vi har nå (et par kurs til så kan dere lage et slikt program). Grensebetingelsene vi i så fall måtte gi til datamaskinen er null forskyvning $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ på den fast innspente enden og et fordelt trykk p på arealet A_F som vi må spesifisere til datamaskinen sammen med geometrien til bjelken.

Vi ønsker i dette kurset å regne for hånd. Litt unna der personen står så kan det vel ikke være så veldig nøye for spenningene i bjelken akkurat hvordan personen står? Det å finne ut om personen står på én fot, to føtter eller klamrer seg fast etter fingrene på enden av bjelken er nok ikke så lett å finne ut hvis vi bare måler spenningene for eksempel midt på bjelken?

Saint-Venants prinsipp sier akkurat dette. Det er bare lokalt rundt grensebetingelsene at det betyr noe akkurat hvor store sko personen vår har. Så lenge den globale effekten er den samme, altså at det kommer en kraft P i negativ y-retning ned på enden av bjelken på ett eller annet vis, så kan vi sette denne kraften på litt som vi vil. Det blir ikke helt riktig, men litt unna grensebetingelsen blir det ganske så rett. Dette kan faktisk bevises også matematisk for en del enkle geometrier. Vi nøyer oss her med å si at med mindre du går veldig inn for å lage en konstruksjon der Saint-Venants prinsipp ikke fungerer så vil det normalt være en god tilnærming.



$$\sigma \cdot n = -\begin{bmatrix} 0 \\ P/A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{yz} = -P/A \quad \text{(i gjennomsnitt)}$$

Vi kan for eksempel sette på en ytre skjærspenning på enden av bjelken for å få samme effekt som personen som står på toppen. Hvis tverrsnittsarealet av bjelken er A så setter vi på en skjærspenning $\sigma_{yz} = -P/A$ som virker i negativ y-retning.

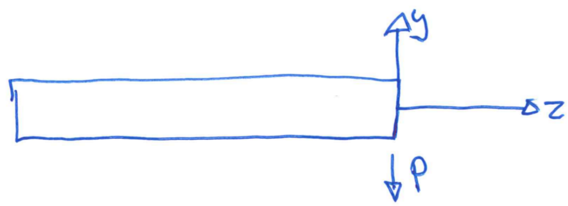
Nå kan vi litt om forenkling av grensebetingelser. Neste steg blir å se om vi klarer å løse problemet vårt med å finne spenninger i en bjelke der en person står på enden ved å bruke likevektsprinsippene.

2 Likevekt av fast innspent bjelke med punktlast

Vi ser videre på bjelken vår. Den sitter fremdeles fast i en vegg i den ene enden og som er belastet med en ytre kraft P nedover i den andre enden. Vi velger å forenkle effekten av personen ved å sette på en skjærspenning på den frie enden som forklart over.

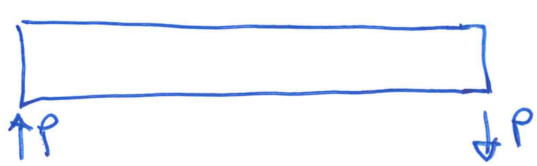
For å forenkle tegningene ser vi nå bort fra x-retningen. Vi tegner et idealisert bilde av bjelken uten veggen og alt som er rundt. Dette kalles et fritt legeme diagram og er ekstremt nyttig når man skal gjøre slike likevektsberegninger selv. Hint til egen oppgaveregning: står du fast så tegn figur! Det er mye enklere å resonnere da.

Vi begynner med det vi vet. Vi har en bjelke og en kraft P som virker på den. Vi tegner nå kreftene fra omverdenen *på* bjelken. Vi kan like gjerne tegne kreftene *fra* bjelken på omverdenen, og de blir like med motsatt fortegn (Newtons 3. lov). Den første metoden er vanligvis enklest å forstå.



NB: her kan det fort bli fortegnsfeil! Om det er en kraft fra et legeme på omverdenen eller omvendt er en veldig vanlig ting å rote det til med på oppgaver.

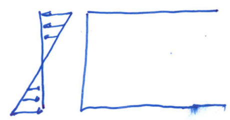
Vi har altså valgt å tegne opp kreftene fra omverdenen *på* bjelken. Det er opplagt at vi ikke har balanse i kreftene så vi må ha en kraft oppover ett eller annet sted. Med mindre det er ekstrem vind oppover som er med på å løfte bjelken så må kraften oppover komme i den enden som er fast i veggen. Det kommer trolig ikke som noe sjokk på deg at det er veggen som holder bjelken oppe? Vi kaller en kraft som kommer fordi bjelken sitter fast for en opplagerkraft. Vi får følgende fritt legeme diagram:



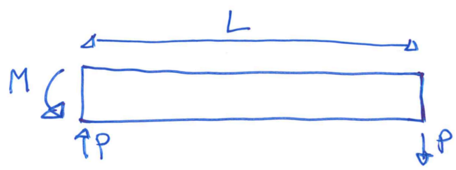
Da er vel alt greit og bjelken er i balanse? Vel, hva med balanse i momenter? Hvis det er en ubalanse i moment så vil bjelken rotere, og vi har antatt at den står stille (dette er statikk, ikke dynamikk).

Vi sier at lengden av bjelken er L og så regner vi momentbalanse om den enden av bjelken som sitter fast i veggen. Kraften som virker oppover ved veggen (opplagerkraften) har her null momentarm, så det er bare kraften fra personen på den frie enden som bidrar. Vi har altså et ubalansert moment $M = PL$ som kommer fra denne kraften. Kan vi motvirke dette slik at vi får likevekt?

Ja! Vi kan ha en lineær fordeling av σ_{yy} i y-retning — et bøyemoment.

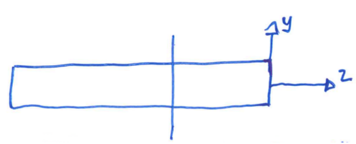


Vi kan altså ha et bøyemoment i den innspente enden og vi får et ferdig fritt legeme diagram som ser slik ut:

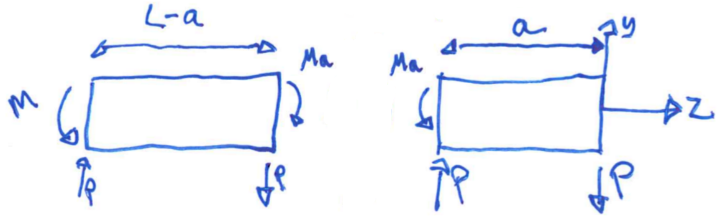


Generelt så kan vi også ha en kraft fra veggen på bjelken som virker langsmed bjelken, i z-retningen. I dette tilfellet er det ingen krefter i z-retningen, så vi dropper å tegne på denne kraften for så å regne ut at den er null.

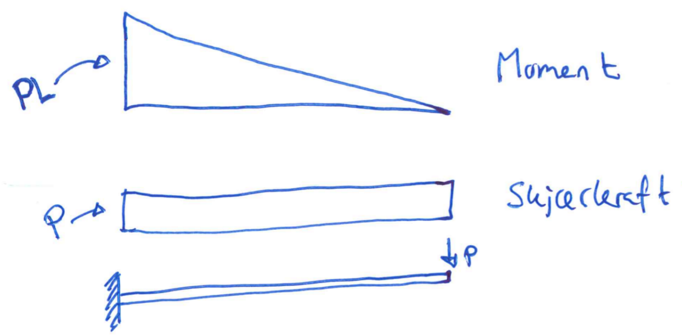
Nå er vi ferdige med å undersøke grensebetingelsene og kan begynne å finne ut av hva som skjer inne i bjelken litt unna grensebetingelsene. La oss se på et vertikalt (xy-plan) tverrsnitt en tilfeldig plass på bjelken:



Snittet er en avstand a fra den frie enden (se figur under). Ser vi på kraftbalansen på den høyre biten så ser vi at den venstre biten må dytte på den høyre med en kraft P oppover. Ellers ville den høyre biten dette ned. Likeledes vil den høyre biten dytte ned den venstre biten. Det ser altså ut som at skjærkraften, den integrerte skjærspenningen σ_{yz} over tverrsnittet, er lik P uansett hvor vi er — den er ikke avhengig av posisjonen a.



Nå har vi kraftbalanse på den høyre biten av bjelken. Vi må også ha momentbalanse på denne biten. Tar vi og regner momentet rundt snittet a får vi at momentet i snittet må ha en verdi $M_a = Pa$ for at vi skal få null moment over alt. Momentet er som kjent en lineær fordeling av σ_{yy} i y-retning og pga. Newtons 3. lov må det samme momentet virke på den venstre delen fra den høyre som på den høyre delen fra den venstre. Fortegnet blir omvendt siden normalvektorene peker i motsatt retning.



Moment og skjærkraftfordeling (inkonsistent fortegn, se under)

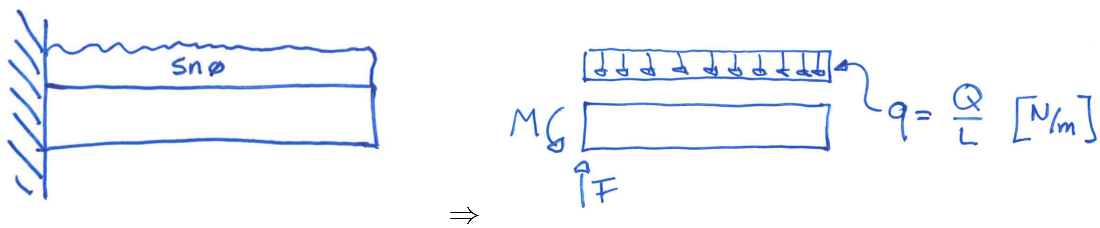
Vi har i tegningen sett bort fra fortegn. Momentet på den høyre siden av bjelken fra den venstre siden av bjelken er et moment om x-aksen. Positivt fortegn på et moment om x-aksen er et moment som roterer den frie enden nedover (pek høyre tommel i retning x-aksen, fingrene peker da i positiv momentretning med standard høyrehånds fortegnsregler). Vårt moment på den høyre siden av bjelken roterer bjelketuppen oppover og er dermed negativt. Kraften på den høyre siden er i positiv y-retning så skjærkraften er positiv.

Med disse standard fortegnskonvensjonene er det slik at skjærkraftfordelingen langs bjelken er den deriverte av momentfordelingen med hensyn på bjelkeaksen. Dette gjelder generelt (se ligning 10.3 og 10.4 i Lautrups bok for mer detaljer).

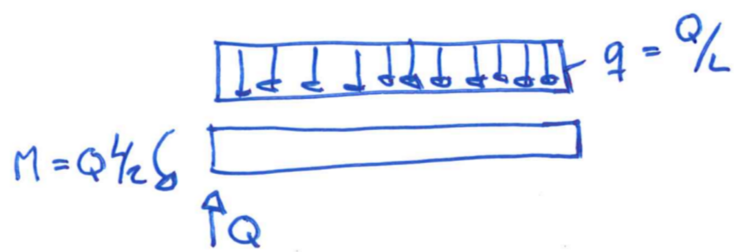
NB: vi har valgt høyrehåndsregel for fortegn på momenter på en flate med normalvektor pekende til venstre (vi ser på den høyre biten). Det er også veldig vanlig å velge høyrehåndssystem for flater med normalvektor som peker mot høyre. Vi vil få de samme resulatene (med motsatt fortegn) hvis vi ser på den venstre biten i stedet for den høyre biten og velger et slikt koordinatsystem. Det er altså også her lett å få fortegnsfeil. Velg en metode og vær konsistent!

3 Likevekt av fast innspent bjelke med fordelt last

Vi ser på den samme bjelken som tidligere, men nå har personen som stod på enden blitt kald og gått et annet sted. Det har kommet et kraftig snøvær og det ligger en masse snø med total vekt Q jevnt fordelt utover lengden L med fordelt last q per meter $q = Q/L$.



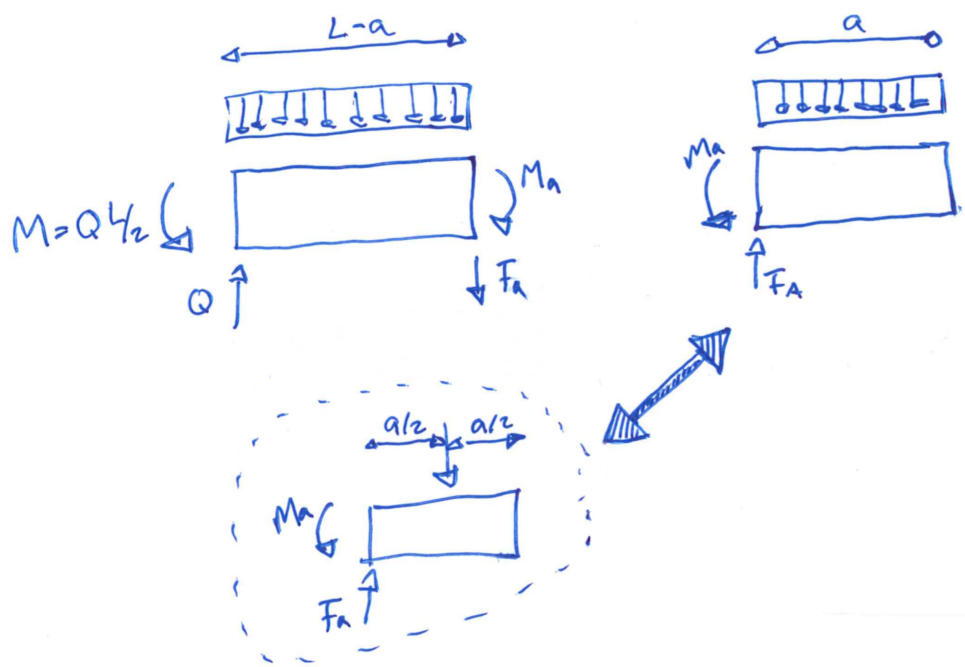
Hvis vi ser på bjelken i et fritt legeme diagram så ser vi at den totale kraften fra veggen på bjelken må være lik den totale kraften Q nedover, men kraften fra veggen på bjelken virker selvfølgelig oppover slik at det blir balanse.



Vi får også nå et ubalansert moment som må motvirkes av et moment fra veggen på bjelken. Når vi regner ut momentet om innfestingen kan vi forenkle den fordelte kraften q til å være en punktlast Q som virker i midt på bjelken i $L/2$. Momentet fra denne punktlasten regnet rundt der bjelken er festet til veggen vil være det samme som momentet fra hele fordelingen. Dette er også lett å sjekke.

$$M = \int_0^L qz \, \mathrm{d}z = [qz^2/2]_0^L = qL^2/2 = QL/2$$

Vi kan gjøre det samme som for bjelken med punktlast og dele den opp med et snitt i en posisjon a fra enden. Gjør vi dette vil vi se at vi får en skjærkraft som varierer lineært med avstanden a fra den frie enden.

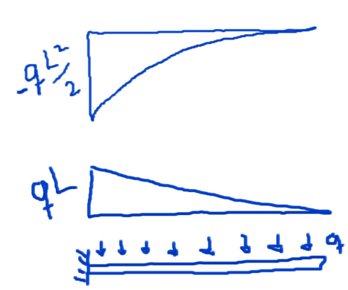


Skjærkraften blir altså $F_a = qa$. Siden momentet kan integreres opp fra skjærkraften finner vi $M(a) = -qa^2/2 + C$ der C er en konstant. Siden momentet er null på den frie enden må vi ha $C = 0$.

En mer naturlig beskrivelse er kanskje å legge origo ved veggen og ha skjærkraft og moment som funksjon av z-coordinaten. Skjærkraft og moment i snittet a blir da

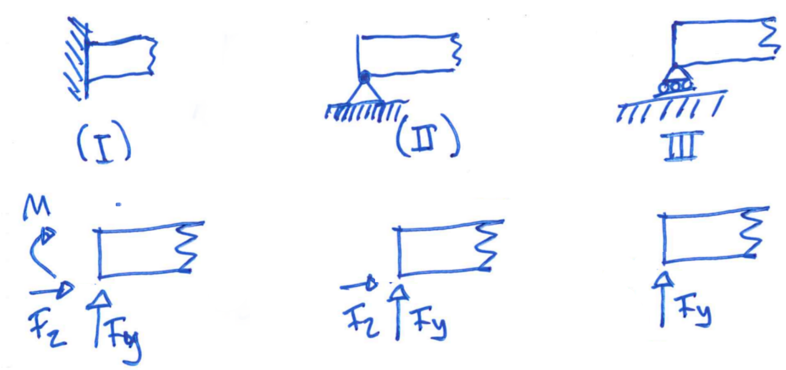
$$\begin{aligned} F_a &= Q - qz = qL - qz \\ M_a &= qz^2/2 - QL/2 = qz^2/2 - qL^2/2 \end{aligned}$$

Vi kan også regne momentet direkte uten å integrere opp skjærkraften. Begge metoder vil fungere. Vi har her brukt riktig fortegn, altså at momentet i dette tilfellet skal bli mer og mer negativt jo nærmere veggen vi kommer. Fordelingen av moment og skjærkraft langs bjelkeaksen er skissert i figuren under.



4 Skissering av konstruksjoner

For å forstå enkle konstruksjonstegninger så trenger vi litt figur-notasjon. Vi kan sette fast en bjelke eller en hvilken som helst annen konstruksjon vi tegner (i 2D) på følgende måter:

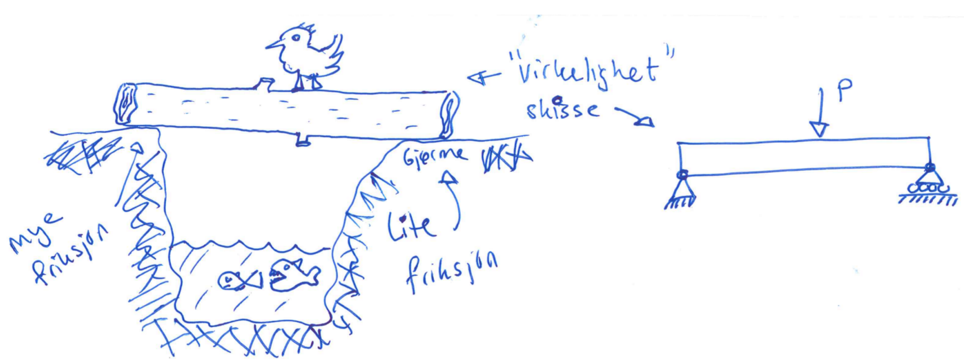


I - fast innspent: vi setter forskyvningen $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ og kan ha en vertikal kraft, en horisontal kraft og et moment. Dette er typisk for en bjelke som henger helt fast i en vegg. Det er denne vi har jobbet med til nå.

II - fritt opplagt. Vi fester bjelken i et ledd som roterer fritt. Vi kan ha både vertikale og horisontale krefter, men vi tillater ikke noe moment på enden. Se for deg en trestamme som ligger over en kløft. Den holdes oppe, men kan ikke ha noe moment på enden.

III - rullelager. Her har vi bare kraft i en retning. I den andre retningen kan innfestingen rulle friksjonsfritt. Bjelken er i tillegg festet i et ledd slik at det ikke er noe moment. Se for deg at trestammen som ligger over kløften ligger på veldig glatt gjørme på ene siden. Den blir holdt oppe, men kan skli horisontalt

Det finnes selvfølgelig også andre måter å sette fast en bjelke, men disse er de mest brukte for å forenkle tegninger og beregninger.

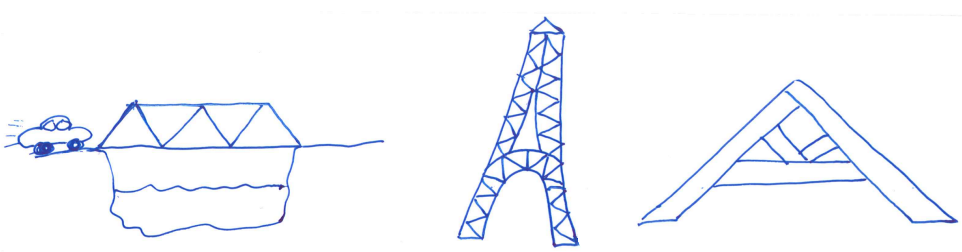


5 Systemer av aksialstaver (fagverk)

Hvis vi setter sammen bjelker til en større konstruksjon så kan vi fort få noe som blir vanskelig å regne på for hånd. Men, det finnes en vanlig forenkling som kan gjøre oss i stand til å regne på ganske kompliserte konstruksjoner. Vi skal innføre *aksialstaven* og sette aksialstaver sammen til *fagverk* (engelsk: truss).

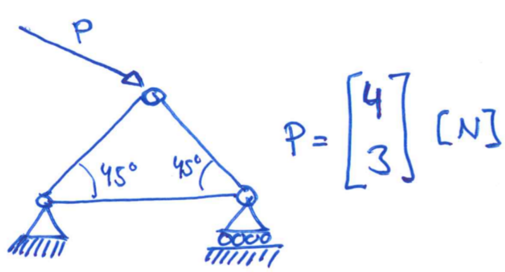
En aksialstav er den enkleste konstruksjonsdelen vi kan tenke oss. Den har en bjelke/stav-akse som en vanlig bjelke. La oss fremdeles kalle denne for z-aksen. I en aksialstav så har vi bare spenninger i akseretningen. Vi tillater også kun konstant fordeling av denne spenningen, σ_{zz}. Det er altså *ingen* bøying eller skjærkraft i en aksialstav.

Siden det, som vi skal se, er ganske lett å regne på aksialstaver så har de vært mye brukt opp igjennom historien. Fagverkskonstruksjoner finnes over alt og benyttes fremdeles mye, spesielt i broer og takkonstruksjoner.



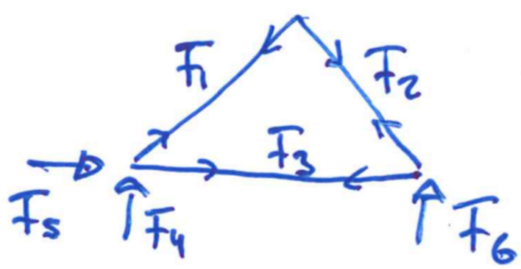
Vi begynner med en veldig enkel konstruksjon, et huskestativ:

Vi velger å forenkle dette på følgende måte:



I og med at vi ikke kan ha bøyemoment i noen av aksialstavene så tenker vi oss at de sitter festet sammen med kuleledd i hvert *knutepunkt*. Vi må ha balanse i kreftene i dette kuleleddet, så i 2D får vi to ligninger for hvert knutepunkt: kraftbalanse i horisontal og vertikal retning.

De ukjente er kreftene fra omverdenen på fagverket og kreftene som går i hver stav. Kreftene fra omverdenen, *opplagerkreftene*, kan vi regne ut på samme måte som vi gjorde for bjelkene tidligere. Vi kan også behandle dem sammen med kreftene i aksialstavene. Det er den siste måten vi skal bruke her. Vi kaller de ukjente kreftene F_1 til F_6. Vi har tre knutepunkt, så dette kan vi kanskje greie å løse, men ikke nødvendigvis, mer om det seinere.



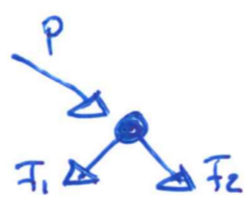
Vi antar som fortegnskonvensjon at aksialstavene strekkes. Det betyr at de drar på knutepunktene og at knutepunktene drar på dem. Hvis vi får en negativt verdi på en av kreftene så betyr det at staven presses sammen (trykkspenning i staven).

La oss se på det første knutepunktet, for eksempel det på toppen. For summen av krefter i horisontalretningen har vi, når vi antar at $\mathbf{P} = [4, 3]$ og at vinkelen på skråstavene er 45 deg,

$$4 - F_1/\sqrt{2} + F_2/\sqrt{2} = 0$$

og i vertikalretningen får vi

$$-3 - F_1/\sqrt{2} - F_2/\sqrt{2} = 0.$$



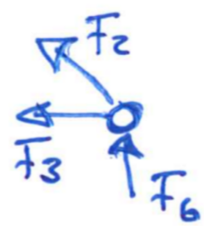
Vi velger her positive retninger til høyre og oppover, men dette er ikke så viktig så lenge vi velger den samme retningen som positiv for alle bidragene.

Det neste knutepunktet vi ser på er det lengst til høyre. Her får vi i horisontalretningen følgende kraftbalanse

$$-F_2/\sqrt{2} - F_3 = 0$$

og i vertikalretningen får vi

$$F_2/\sqrt{2} + F_6 = 0.$$

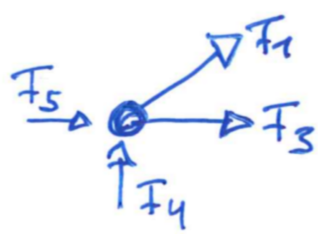


Det siste knutepunktet vi ser på er det lengst til venstre. Her får vi i horisontalretningen følgende kraftbalanse

$$F_1/\sqrt{2} + F_3 + F_5 = 0$$

og i vertikalretningen får vi

$$F_1/\sqrt{2} + F_4 = 0.$$



Vi har nå et system av lineære ligninger. Vi samler ligningene i en matrise $\mathbf{A}$, en vektor med ukjente $\mathbf{F}$ og en høyreside av ligningsystemet, $\mathbf{b}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan så løse $\mathbf{AF} = \mathbf{b}$, enten for hånd eller være late som meg og bruke numpy. Vi får da

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -7/\sqrt{2} \\ 3.5 \\ -0.5 \\ -4 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

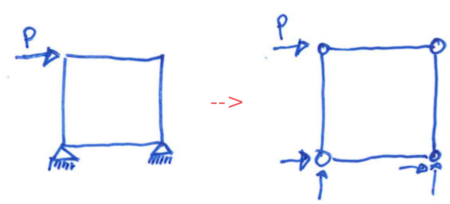
Vi ser at $F_4 + F_6$ er lik vertikalkomponenten av $\mathbf{P}$ (med motsatt fortegn) og det samme gjelder for horisontalkomponenten og F_5. Vi har altså global likevekt.

Begrensninger

Siden vi i eksempelet hadde like mange ukjente som ligninger kunne vi finne opplagerkrefter og krefter i stavene kun ved hjelp av likevektsbetrakninger. Dette kaller vi et statisk bestemt system. Hvis man tegner en «tilfeldig» konstruksjon av aksialstaver vil dette ikke generelt gå bra. Det er to problemer vi kan møte:

1) For mange ukjente. Dette kalles et statisk ubestemt system. En slik konstruksjon vil være mulig å bygge, og det går selvfølgelig også an å regne på den, men metoder for å regne på slike statisk ubestemte konstruksjoner er ikke en del av dette kurset. Slike avanserte håndregningsmetoder er også på vei til å «gå av moten» siden det er blitt veldig vanlig å bruke dataprogrammer til å regne alt annet en veldig enkle kontrollberegninger for å sjekke at programmet gir et fornuftig svar (denne påstanden er Tormods personlige mening og er sikkert ikke sann i alle tilfeller ...).

2) Mekanismer. I og med at vi antar at det ikke er noen momenter i stavene så sitter de festet samme med kuleledd (i vår enkle beregningsmetode). Mange konstruksjoner vil da ikke fungere, slik som firkant-fagverket i figuren under.

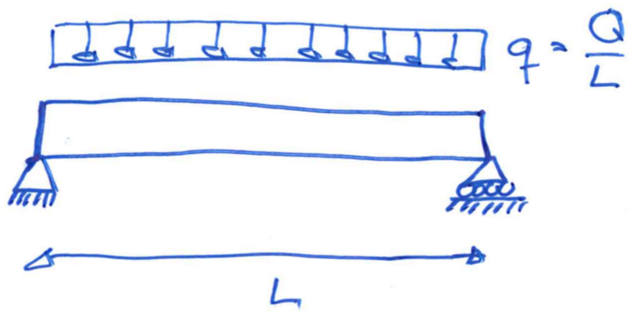


For at dette firkantfagverket ikke skal klappe sammen må vi kunne overføre momenter og skjærkrefter i de vertikale søylene. Da må vi regne med bjelker og ikke aksialstaver. Med aksialstaver og kuleledd i hjørnene vil hele konstruksjonen kollapse. Vi har åtte ukjente og åtte ligninger så vi kunne jo i utgangspunktet tro det skulle gå an å regne ut kreftene i stavene. Det som vil skje er at matrisen vi setter opp for dette systemet blir singulær.

6 Oppgaver

Oppgave T1

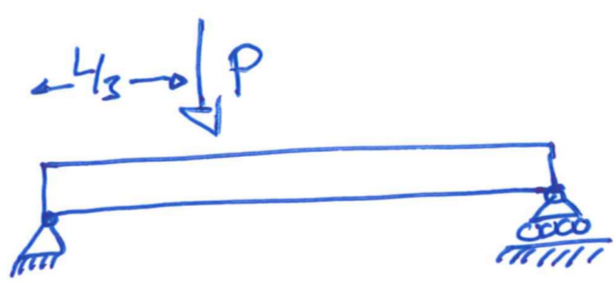
Vi ser på en fritt opplagt bjelke med lengde L der vi har en fordelt last $q = Q/L$



1. Finn kreftene fra grensebetingelsene (opplagrene) på bjelken.
2. Beregn fordelingen av moment og skjærkraft i bjelken langs bjelkeaksen ved å se på et snitt og kreve likevekt på begge sider av snittet.
3. Tegn opp fordeling av skjærkraft og moment langs bjelken. Vis at den deriverte av momentfordelingen (med hensyn på bjelkeaksen z eller avstanden a fra den ene enden) er lik skjærkraftfordelingen.

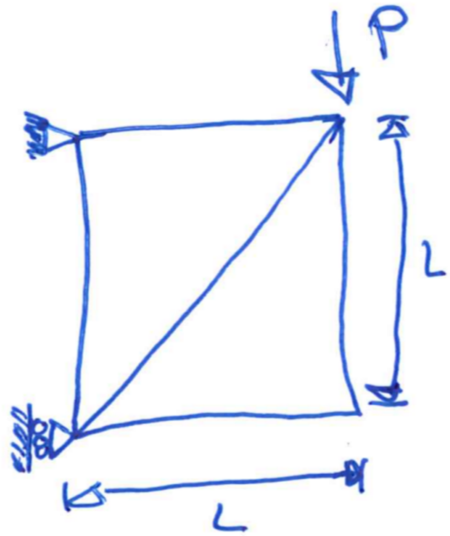
Oppgave T2

Gjenta stegene i oppgave T1, men nå med en punktlast P som er plassert en tredjedel inn fra en venstre side.



Oppgave T3

a) Finn opplagerkrefter og kreftene i stavene for følgende fagverk. Anta $L = P = 1$



b) Anta $P = 1$ [N], $L = 1$ [m] og at bjelkene er sirkulærsylindre med radius $r = 1$[cm]. Hvor sterkt materiale (hvilken E-modul og flytspenning σ_y) må vi ha for at ingen av stavene i fagverket skal enten knekke eller flyte?