Elastic Vibrations 9.11.2015

Lecture 12: Elastodynamics I

Kapittel 24 : Vibrasjoner i elastiske stoffer
- 24.1 : Elastodynamics
- 24.2 : Harmoniske vibrasjoner / bølger
- (24.3 : Refraksjoner og refleksjoner)
- (24.4 : Overflate bølger.)

Oversikt:
(1) Repetisjon av T1 fra L1~~0~~
(2) Elastodynamikk
(3) Harmoniske bølger

REPETISJON FRA L1~~0~~

- Knekning er en ikke-lineær ustabilitet, hvor små krefter kan føre til store nedbøyinger.

- Ligningene for likevekt av en stav som klemmes sammen med gitt last F:

$$\boxed{EI\, y''(z) = -F y(z)}$$

der E er Young's modulus av staven og $I = \int_A x_2^2 \, dA$ er arealmomentet. Løsninger på formen

$$y(z) = A \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}\right) \quad \text{for visse } F\ldots$$

Svar på oppgave

$E = 205 \text{ GPa}$ (stål).

$$I_a = \int_A x_2^2 \, dA = \int \frac{\pi}{4} a^4 \quad \text{der } a \text{ er radius}$$

$$F_E = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot 205 \times 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \, 0.1^4$$

$$= \frac{\pi^2}{L^2} \cdot 205 \times 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \, 10^{-4}$$

$$= \frac{\pi^3}{L^2} \cdot \frac{205}{4} \cdot 10^2$$

$$\sim \frac{31 \cdot 205 \cdot 10^2}{4 L^2} \sim \frac{1589 \times 10^2}{L^2} \cong \frac{1.6 \times 10^6}{L^2}$$

$L = 10 \text{ m}$: $\quad F_E \sim \frac{1.6 \times 10^6}{10^2} = 1.6 \times 10^4$ ✯

$$= 16 \times 10^3$$

F_E unit: $m^{-2} \cdot \text{GPa} \cdot m^4 = \text{GPa} \cdot m^2 = \frac{N}{m^2} \cdot m^2 = N$

- Løsningene finnes for pålagte krefter F over Euler grensen F_E der

$$\boxed{F_E \overset{\text{def}}{=} \frac{\pi^2}{L^2} E I} \qquad (N)$$

Oppgave: 5-10 min + 5 min

Du har en stav med radius 0.1 m (og sirkulært tverrsnitt) som er laget av stål. Anta at staven må regne med å bli belastet med kraft tilsvarende 10 MN ($N \times 10^3$). Hvor lang kan staven være uten å risikere å brekke / knekke?

—

Kap 24.1: Ligninger for elastiske bølger (Elastodynamikk)

Vi skal se på de dynamiske ligningene for bølger / bevegelse i elastiske stoffer. Tidligere har vi sett på likevekts-ligningene, dvs betingelsene for at det elastiske legemet skal forbli i ro. De dynamiske ligningene er en utvidelse, som vi egentlig allerede har vært innom.

Anvendelser:

- Jordskjelv (Jordskorpen er elastisk i visse regimer)
- Magnetic resonance elastography (MRE)
- Musikkinstrumenter / Lyd

Antagelser :

(a) Anta små forskyvningsgradienter (sakte varierende forskyvninger), slik at Euler og Lagrange koordinater kan sees på som sammenfallende og

(b) lineære spennings–tøyningsrelasjoner (Hooke's lov)

(c) Homogent, isotropisk materiale.

De elastodynamiske ligningene (de dynamiske elastisitetslign) er gitt ved : finn u slik at $u = u(x,t)$

Ytre Volumkraft f $\left(\frac{N}{m3}\right)$

Tetthet ρ

$\ddot{u} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u$

(1) $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$

(2) $\sigma = 2\mu\,\varepsilon + \lambda \operatorname{tr}\varepsilon\, I$ (μ, λ Lamé param.)

(3) $\rho\,\ddot{u} = \nabla\cdot\sigma + f$ ~~div~~ (Bevaring av momentum) (*)

(4) Randbetingelser ($u|_{\partial\Omega_D} = g$, $\sigma\cdot n|_{\partial\Omega_N} = t$)

(5) Initialbetingelser ($u(t=0) = u_0$, $\dot{u}(t=0) = v_0$)

(3) kommer fra Newton's

$$m \cdot a = F$$

Husk at en materialpartikkel i posisjon x har fått posisjon ved tid t: $d(x,t) = x + u(x,t)$

og da hastighet (endring i posisjon) v:

$$v(x,t) = \dot{d}(x) = \dot{u}(x,t)$$

og akselerasjon $a(x,t) = \dot{v}(x,t) = \ddot{u}(x,t)$

Remark 1: Merk at hvis $\ddot{u} = 0 \Rightarrow$ Likevektslikningene (bra!)

Navier's lov for bevegelse

Setter (1) og (2) inn i (3) får vi:

$$\rho \ddot{u} = \overset{\nabla\cdot}{\cancel{\text{div}}}\left(\frac{2\mu}{2}(\nabla u + \nabla u^T) + \lambda \overset{\nabla\cdot u}{\cancel{\text{div}}}\, \cancel{\text{div}}\, u I\right) + f$$

Dere har tidligere vist at

$$\overset{\nabla\cdot}{\cancel{\text{div}}}(\nabla u^T) = \nabla(\overset{\nabla\cdot}{\cancel{\text{div}}}\, u) = \cancel{\text{div}}(\overset{\nabla\cdot}{\text{div}}\, u I)$$

Så da får vi:

Navier's bevegelseslov (N.'s law of motion)

$$\text{(N.L.)} \quad \boxed{\rho \ddot{u} = \mu \, \cancel{\text{div}}\, \nabla\cdot \nabla u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla\cdot u + f}$$

Her har vi brukt antagelsen om at μ og λ er konstante i rom og tid, altså at legemet er homogent.

Remark 2: Merk at i de dynamiske elastisitetslikninger går "intet tapt" i den forstand at all energi veksler mellom kinetisk og potensiell energi i legemet; ingen dissipasjon (tap av energi) til omgivelsene.
Så Navier's ligning her beskriver et idealisert tilfelle der vibrasjoner aldri vil dø ut f.eks.

Eksempel på en longitidal bølge

$$u_L(x,t) = \{u_{L_1}(x,t), 0, 0\}$$

Med $u_{L_1}(x,t) = u_0 \sin(k(x-ct))$

$$c = c_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

Eksempel på en transversal bølge

$$u_T = \{0, u_{T2}(x,t), 0\}$$

$$u_{T2}(x,t) = u_0 \sin(k(x-ct))$$

$$c = c_T = \sqrt{\mu/\rho}$$

Eng: Longitudinal og transversal forskyvningsfelt/bølger
Nor:

Elastiske bølger kan sees på som å ha to komponenter, en longitudinal/longitudinal og en tranverse/transversal som kan sees på som en generalisering/variant av kompresjoner/forlengelser og ~~sheo~~ skjær forskyvninger.

~~Man kan~~ Anta at et vilkårlig vektorfelt u kan skrives som en sum

$$u = u_L + u_T$$

curl-fri

der u_L er slik at $\nabla \times u_L = 0$ og u_T er slik at $\nabla \cdot u_T = 0$ (Exercise 24.4 – se gruppe)

Divergens-fri

La $f = 0$

Setter vi inn i Navier's dynamiske ligning (forrige side) for u_T så får vi:

Dette har dere vist i en oppgave !(?)

$$\boxed{\rho \ddot{u}_T = \mu \nabla \cdot \nabla u_T = \mu \nabla^2 u_T = \mu \Delta u_T}$$

Siden $\nabla \times (\nabla \times u_L) = \nabla(\nabla \cdot u_L) - \nabla^2 u_L = 0$, så får vi at

$$\boxed{\rho \ddot{u}_L = (2\mu + \lambda) \nabla^2 u_L}$$

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{\dfrac{\cancel{E}}{2(1+\cancel{\nu})}}{\dfrac{\cancel{E}\nu}{(1-2\nu)(1+\cancel{\nu})} + \dfrac{1\cancel{E}}{(\cancel{1+\nu})}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\dfrac{\nu}{(1-2\nu)}+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{\nu+1-2\nu}{1-2\nu}}$$

$$= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

Oppgave (Svar)

$$\left.\begin{aligned} E &= 205 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.29 \end{aligned}\right\} \text{ Stål (p.127)}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{205 \text{ GPa} \cdot 0.29}{(1-2\cdot 0.29)(1+0.29)} = \frac{59.45}{0.42\cdot 1.29}$$

$$= \frac{59.45 \text{ GPa}}{0.5418} \simeq 110 \text{ GPa}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{205 \text{ GPa}}{2\cdot 1.29} = \frac{102.5 \text{ GPa}}{1.29} \simeq 79 \text{ GPa}$$

$$\alpha_L^2 = \frac{2\mu+\lambda}{\rho} = \frac{268 \text{ GPa}}{7.8\times 10^3 \text{ kg/m}^3} = \frac{268 \text{ MPa}}{7.8 \text{ kg/m}^3} = \frac{268\times 10^6 \text{ Pa}}{7.8 \text{ kg/m}^3}$$

$$= 34\times 10^6 \frac{N}{m^2}\cdot\frac{m^3}{kg} = 34\times 10^6 \frac{kg\, m^{4}}{kg\, m^{2}\, s^2}$$

$$= 3.4\times 10^6 \left(\frac{m}{s}\right)^2$$

$$\alpha_L = \sqrt{3.4\times 10^6}\ \frac{m}{s} = 1.8\times 10^3 \frac{m}{s} \approx 1.8 \frac{km}{s}$$

$$\alpha_T^2 = \frac{\mu}{\rho} =$$

$$\rho = 7.80 \frac{g}{cm^3} = 7.80 \frac{kg}{(dm)^3} = 7.8 \frac{kg}{10^{-3} m^3}$$

$$= 7.8\times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Konklusjon: Hvis $u(x,t)$ løser N., så kan u skrives som en superposisjon (sum) av u_L og u_T der u_L er en trykkbølge og u_T er en skjærbølge som hver løser:

$$\rho \ddot{u}_T = \mu \Delta u_T \quad \text{og} \quad \rho \ddot{u}_L = (2\mu+\lambda)\Delta u_L$$

Disse ligningene er eksempler på standard bølge ligning

$$\ddot{u} = \alpha \Delta u$$

med fasehastighet α_L, α_T gitt ved $\left.\right\}$ $\alpha_L^2 = \frac{2\mu+\lambda}{\rho}$ og $\alpha_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$

Eksempel / Oppgave (5–10 min + 5 min)

- Hvilke bølgetype er raskest? u_L (Trykk!)
- Hva er fasehastighetene for et legeme av stål? (Anta tetthet av stål på 7.80 ~~kg~~ g/cm^3)

Forholdet mellom ~~trykk~~ skjær bølge hastighet og ~~skjær~~ trykk bølge hastighet er gitt ved q der

Enhetsløs $\quad q^2 = \frac{\alpha_T^2}{\alpha_L^2} = \frac{\mu}{2\mu+\lambda} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$ (Se ←)

Remarks:

- Bare avhengig av ν og er monotont synkende med ν
- Max (for $\nu = 0$) $= \sqrt{1/2} \sim 0.71$
- I metall ($\nu = 1/3$ typisk) $\Longrightarrow q \sim 1/2$

$$a = a_r + i a_c$$
$$b = b_r + i b_c$$
$$\mathrm{Re}\{a \cdot b\} = \mathrm{Re}\{a_r b_r + i a_c b_r + i a_r b_c - a_c b_c\}$$
$$= a_r b_r - a_c b_c$$
$$\mathrm{Im}\{a \cdot b\} = a_c b_r + a_r b_c$$

Euler's formula: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

La oss skrive dette litt annerledes

Har / Vi skriver (avhengig av ω, ikke t!)

$$\vec{u}(x, \omega) = \vec{u_1}(x) + i \vec{u_2}(x) \qquad (\in \mathbb{C}^3)$$

Introduser

$$\vec{c}(x, t) = \vec{u}(x, \omega) e^{-i\omega t} \qquad (\in \mathbb{C}^3)$$

Da vil

$$\boxed{e^{-i\omega t} \overset{\text{Euler's formula.}}{\underset{\text{def}}{=}} \cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)}$$

$$\mathrm{Re}\{c\} = \mathrm{Re}\{\vec{u}(x, \omega)\} \mathrm{Re}\{e^{-i\omega t}\}$$
$$- \mathrm{Im}\{\vec{u}(x, \omega)\} \mathrm{Im}\{e^{-i\omega t}\}$$
$$= \vec{u_1}(x) \cdot \cos \omega t - \vec{u_2}(x)(-\sin \omega t)$$
$$= \vec{u_1}(x) \cos \omega t + \vec{u_2}(x) \sin(\omega t).$$

Similarly $\mathrm{Im}\{c\} = \ldots$

Recall:

$$\mathrm{Re}\{e^{-i\omega t}\} = \cos(-\omega t) = \cos(\omega t) \quad \text{(symmetry)}$$
$$\mathrm{Im}\{e^{-i\omega t}\} = \sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$$

Endring i trykk er gitt ved (se p. 130)

$$\Delta p = -K \nabla \cdot u$$

der $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ er Bulk modulus

Siden $\nabla \cdot u_T = 0$, så ~~følg~~ fører disse ~~bølgene~~ skjær bølgene ikke til endringer i trykk. Bare u_L komponenten fører til endringer i trykk, og det er derfor de kalles trykkbølger. u_T fører til skjærspenninger og kalles derfor skjærbølger.

Kap 24.2 Harmoniske vibrasjoner

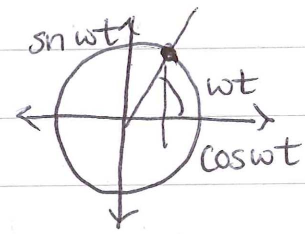
Def: Et harmonisk vektorfelt med sirkulær frekvens ω, må tilfredsstille den harmoniske ligningen

$$\ddot{u} = -\omega^2 u \qquad \text{(HL)}$$

Generelt løsning for $u = u(x,t)$:

Hver av disse er løsninger

$$\vec{u}(x,t) = \vec{u}_1(x)\cos\omega t + \vec{u}_2(x)\sin(\omega t)$$



(Sjekk!) Alternativt, kan skrive dette som et komplekst tidsuavhengig felt:

$$\vec{u}(x) = \vec{u}_1(x) + i\,\vec{u}_2(x)$$

"Det som skjer i rom"

der

$\cancel{u(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}}$

7.3

$u(x,t) = \text{Re}\{c\}$ tilfredsstiller N.L.

$v(x,t) = \text{Im}\{c\}$ tilfredsstiller N.L.

Hvorfor ?

$$V = \omega \, \text{Im}\{ u(x,\omega) e^{-i\omega t} \}$$

$$= \omega \Big[\text{Im}\{u(x,\omega)\} \text{Re}\{e^{-i\omega t}\} + \text{Re}\{u(x,\omega)\} \text{Im}\{e^{-i\omega t}\} \Big]$$

$$= \omega \left[\vec{u}_2(x) \cos(\omega t) + \vec{u}_1(x) \sin(-\omega t) \right]$$

$$= -\vec{u}_1(x) \omega \sin(\omega t) + \vec{u}_2 \omega \cos \omega t$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{u}_1(x) \cos(\omega t) + \vec{u}_2 \sin(\omega t) \right).$$

$$V = \underbrace{\omega \vec{u}_2(x)}_{V_1.} \cos(\omega t) - \underbrace{\omega \vec{u}_1(x)}_{-V_1} \sin(\omega t)$$

also on the form as u!

Sett

$$\vec{c}(x,t) = \vec{u}(x)\, e^{-i\omega t}$$

inn i Navier's ligning og får:

$$\mu\, \nabla\cdot\nabla\vec{c} + (\lambda+\mu)\, \nabla\nabla\cdot\vec{c} = \rho\,\ddot{\vec{c}}$$

$$\ddot{\vec{c}} = -\vec{u}(x)\,\omega^2 e^{-i\omega t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[e^{-i\omega t}\right] &= \frac{\partial}{\partial t}\left[-i\omega e^{-i\omega t}\right] \\ &= +i^2\omega^2 e^{-i\omega t} \\ &= -\omega^2 e^{-i\omega t} \end{aligned}}$$

$$\mu\, \nabla\cdot\nabla\left(\vec{u}(x)\, e^{-i\omega t}\right) + (\lambda+\mu)\, \nabla\nabla\cdot\left(\vec{u}(x)\, e^{-i\omega t}\right)$$

$$= -\vec{u}(x)\,\omega^2 e^{-i\omega t}$$

Tidsfaktorene avhenger ikke av x, og kan taes ut.

Da står vi igjen med

$$\mu\, \nabla\cdot\nabla(\vec{u}(x)) + \lambda+\mu\, \nabla\nabla\cdot\vec{u}(x) = -\omega^2\vec{u}(x)$$

Dette er en ligning for det komplekse vektor feltet $\vec{u}$. Husk at $\vec{u}(x) = \vec{u}_1(x) + i\,\vec{u}_2(x)$ og at

$$\vec{u}(x,t) = u_1(x)\,\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\omega t) + u_2(x)\sin(\omega t)$$

"Det som skjer i tid"

(La $c(x,t) = \vec{u}(x)e^{-i\omega t}$)

der

$$\vec{u}(x,t) = \mathrm{Re}\left[\vec{u}(x)e^{-i\omega t}\right]$$

$$\dot{\vec{u}}(x,t) = \omega\ \mathrm{Im}\left\{\vec{u}(x)e^{-i\omega t}\right\}$$

~~Både $\vec{u}$ og $\dot{\vec{u}}$ er løsninger på den generelle formen, og da vil $\vec{c}$~~

~~Løse N.L.~~ Setter vi $c(x,t)$ inn i N.L., med $f=0$, får vi:

Harmonisk elastisk bølgeligning (N.H.L)

$$\boxed{(*)\quad \mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\vec{u} = -\rho\,\omega^2\vec{u}}$$

der $\vec{u} = \vec{u}(x, \omega) \in \mathbb{C}^3$

Antall kan være ∞ mange

Anta at du kan løse (*) for alle relevante ω (passende randbetingelser etc.). Da kan du skrive enhver løsning på N.L. som:

$$u(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{\omega} u(x,\omega)e^{-i\omega t}\right\}$$

(*) Er et egenverdiproblem for operatoren

$$A = \mu\nabla^2 + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot$$

$$Au = \lambda u$$

med egenverdi $\lambda = -\rho\omega^2$

For et endelig legeme, med tidsuavhengige randbetingelser, så er (stort sett) det et endelig antall reelle egenverdier λ.

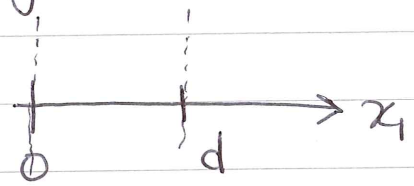
NB: A/B bestemmes av initialbetingelsene!

"Triks" for å ikke si noe om rand-bet.

Eksempel 24.1:

Anta at du har en plate med tykkelse d i x_1-retning og uendelig utstrekning i x_2-x_3-retning.

Anta forskyvning kun i x_1-retning på formen



$$u(x,t) = u_1(x_1)\hat{e}_1$$

Egenverdiproblemet / Den harmoniske elastiske bølgeligninger reduseres da til:

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2_{x_1} u_1 = -\rho\omega^2 u_1$$

med generell løsning

$$k = \frac{\omega}{\alpha_L}$$

$$u_1(x_1) = A\cos\left(\underbrace{\frac{\omega}{\alpha_L}}_{k}x_1\right) + B\sin\left(\underbrace{\frac{\omega}{\alpha_L}}_{}x_1\right)$$

Anta $\sigma \cdot n = 0$ på sidene, dvs

$$\vec{0} = \sigma \cdot \vec{e_1} \Rightarrow \sigma_{11} = (\lambda+2\mu)\varepsilon_{11} = (\lambda+2\mu)\nabla_{x_1} u_1 = 0$$

for $x=0$ og $x=d$. Da må $B=0$ ($\sin'(0) = \cos(0)=1$)

og $kd = n\pi$ for $n=1,2,\ldots \Rightarrow \omega = \frac{n\pi\alpha_L}{d}$

$$u_1(x_1) = \sum_{n=1} A_n\cos\left(\frac{\omega_n}{\alpha_L}x_1\right)$$

der $\omega_n = \frac{n\pi\alpha_L}{d}$ $\quad n=1,2,\ldots$

Plane bølger er karakterisert ved at

$$\vec{c}(x,t) = \vec{a} \quad e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

$$= \underbrace{\vec{a}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{\vec{u}(x)} \quad e^{-i\omega t}$$

Med andre ord, så er plane bølger, løsninger av den harmoniske elastiske ligningen med

$$\vec{u}(x) = \vec{a}\, e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

$$= \vec{a}\left(\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}) + i\sin(\vec{k}\cdot\vec{x})\right)$$

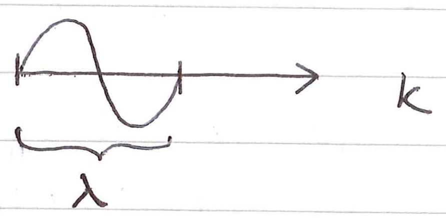
$$= \vec{a}\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}) + i\,\vec{a}\sin(\vec{k}\cdot\vec{x})$$

Dvs, det at disse er løsninger, har vi ikke vist ennå...

$$= (\vec{a}_1 + i\vec{a}_2)\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}) + i(\vec{a}_1 + i\vec{a}_2)\sin(\vec{k}\cdot\vec{x})$$

$$= \ldots$$

Her kalles



$\vec{a} \in \mathbb{C}^3$ Amplitude eller polariseringsvektoren

$\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ bølge vektoren og angir retningen

$\hat{k} = \dfrac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ bølgeretningen

Plane bølger

En plan harmonisk bølge er beskrevet ved den reelle delen av komplekse harmoniske feltet

$$\vec{u}(x,t) = \vec{a}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

Bølge vektor $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{a} \in \mathbb{C}^3$ Amplitude vektor

Bølge retningen er $\hat{k} = \vec{k}/|k|$, bølgelengden er $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$ og perioden er $\tau = 2\pi/\omega$. Bølge fasen er gitt ved $\varphi = k\cdot x - \omega t$ og fasehastigheten er $\omega/|k|$.

Setter vi $u = a\, e^{i k\cdot x}$ inn i H.N.L (*) får vi følgende egenverdi problem for ω: (3x3)

$$\mu \vec{k}^2 \vec{a} + (\lambda+\mu)\, \vec{k}\, \vec{k}\cdot\vec{a} = \rho\, \omega^2 \vec{a}$$

Egenvektorene er på formen: 1 (Trykkbølge)

$$\vec{a} \cong \vec{k} \quad m/ \quad \rho\omega^2 = (\lambda + 2\mu)\vec{k}^2$$

$$= a\,\hat{k}$$

$$u_L(x,t) = a\,\vec{k}\, e^{i(\hat{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \quad \omega/\alpha_L$$

$a \in \mathbb{R}$

2 To stykker med $\vec{a} \perp \vec{k}$ og $\rho\omega^2 = \mu k^2$

$$u_T(x,t) = a\,\hat{t}\, e^{i(\vec{k}\cdot x - \omega t)} \quad \hat{\omega}/\alpha_T$$

~~og $\rho\omega$~~

der $\hat{t} \perp \vec{k}$

Bølgeintensitet:

Spenningstensor

$$I = -\sigma \cdot n$$

Normal vektor

For en plan, harmonisk bølge med amplitude (polarisering) $\vec{a}$ ($a_i \in \mathbb{R}$) og fase $\varphi = k \cdot x - \omega t$ så har vi, for reelle k:

$$\sigma \cdot n = \mathrm{Re}\{-i\omega \vec{a} e^{i\varphi}\} \cdot \mathrm{Re}\{(\mu(i\vec{k}\vec{a} + i\vec{a}\vec{k}) + \lambda(ik \cdot a)I) e^{\varphi t}\}$$

$$= -\omega \vec{a} \sin\varphi \cdot (\mu(\vec{k}\vec{a} + \vec{a}\vec{k}) + \lambda(\vec{k} \cdot \vec{a})I)\sin\varphi$$

$$= -\omega \sin^2\varphi\, ((\lambda+\mu)(\vec{a} \cdot \vec{k})\vec{a} + \mu \vec{a}^2 \vec{k})$$

Setter inn for longitudinal og transverse bølger så får vi

$$I_{L} = \sigma(u_{L}) \cdot n = -\omega \sin^2\varphi \left(\rho \frac{\lambda+\mu}{\rho}(\vec{a} \cdot \vec{k})\vec{a} + \rho\frac{\mu}{\rho}\vec{a}^2\vec{k}\right)$$

$$= -\omega \sin^2\varphi\,(\rho \alpha_L^2 (\vec{a} \cdot \vec{k})\vec{a} + \rho \alpha_T^2 \vec{a}^2 \vec{k})$$

$\vec{a} = a\hat{k}$

$$I_L = -\omega \sin^2\varphi\,(\rho \alpha_L^2 (\vec{a} \cdot \vec{k})\vec{a})$$

$\vec{a} = a\hat{k}$ $|k| =$

$$= -\omega \sin^2\varphi\,(\rho \alpha_L^2 a^2 \hat{k})$$

$$= -\omega \sin^2\varphi\,($$