Lecture 13: Bølger i elastiske media II — 18.11.15

Stoffet er fra Bjørn Gjevik's MEK2200 kompendium + Lautrup

Topics:

- Harmoniske vibrasjoner } 24.2
- Plane bølger }
- Refleksjon og refraksjon ~24.3

÷ (◦ Overflatebølger 24.4)

Repetisjon:

De dynamiske elastisitetsligningene:

$$\rho \ddot{u} = \nabla \cdot \sigma + f \qquad (1)$$

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \operatorname{tr}\varepsilon I \qquad (2)$$

$$\varepsilon = 1/2 (\nabla u + \nabla u^T) \qquad (3)$$

som slått sammen gir Navier's dynamiske ligninger

$$\rho \ddot{u} = \mu \nabla \cdot \nabla u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + f \qquad (4)$$

Alle vektorfelt u, og spesielt løsninger av (4) kan dekomponeres som

$$u = \underbrace{u_L}_{\text{Trykkbølge}} + \underbrace{u_T}_{\text{Skjærbølge}}$$

der $\nabla \times u_L = 0 = \nabla \cdot u_T$. For at u skal løse (4) så må u_L og u_T løse hver sin bølgeligning

$$\rho \ddot{u}_T = \mu \Delta u_T \quad \text{og} \quad \rho \ddot{u}_L = (2\mu + \lambda) \Delta u_L$$

$$\Delta u(x)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u$$

Hva vet vi om løsninger av bølgeligningen?

Anta $\vec{u} = \vec{u}(x,t)$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$

Hva med funksjoner på formen

Bølgevektor

$$(*) \qquad \vec{u}(x,t) = \vec{f}(\mathbf{k} \cdot x - ct) \qquad \vec{k} = k = (k_1, k_2, k_3)$$

Anta at f er en vilkårlig, 2x deriverbar vektorfunksjon.

Vil slike løse

$$(5) \qquad \ddot{u} = \alpha^2 \Delta u$$

for passende α? Ja:

(*) Angir en plan bølge. En plan bølge er slik at forskyvningen u er lik i et plan normalt på bølgeretningen $(k \cdot x = 0)$

$$\dot{u}(x,t) = f'(k \cdot x - ct) \cdot (-c)$$
$$\ddot{u}(x,t) = c^2 f'(k \cdot x - ct)$$

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j} u_i(x,t) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f_i(k \cdot x - ct)$$
$$= \sum_{j=1}^{d} f_i''(k \cdot x - ct) \cdot k_j^2 = f_i''(k \cdot x - ct) \|k\|^2$$

når $\|k\| = \sum_{j=1}^{d} k_j^2 = k \cdot k$.

Så for $\alpha = \|k\|/c$ så vil (*) løse (5).

Det finnes mange andre løsninger og.., men (*) er ett eksempel, og altså en plan bølge.

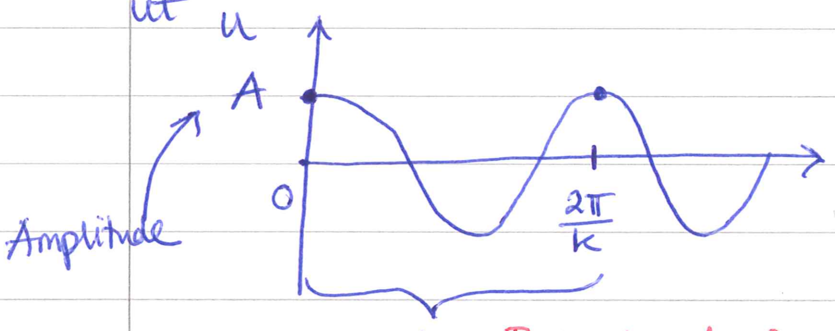
Eksempler på plane bølger:

La oss ta 1D først: $x = (x_1)$. Ta f.eks

$$u(x,t) = A\cos(kx - ct)$$

Dette er en plan (og harmonisk) bølge. (Mer om harmoniske bølger senere) (som løser (5) ved ⊛)

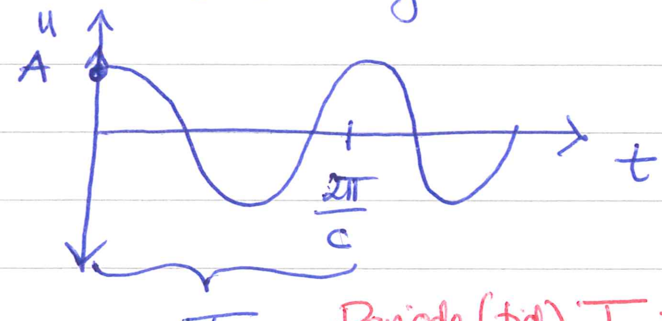
Hold t konstant (f.eks $t=0$). Da vil u se noe slikt ut



Bølgetallet (Antall bølgelengder per lengde * 2π)

λ Bølgelengde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Hold så x konstant (f.eks $x=0$). Da vil u se noe slikt ut (cos er symmetrisk om x-aksen)



Vinkelfrekvensen

T Periode (tid) $T = \frac{2\pi}{c}$ $\quad c = \frac{2\pi}{T}$

- Merk at vi like gjerne kunne brukt $u = A\sin(kx - ct)$ eller tatt summen!
- Koeffisientene A, k og c kan bestemmes ved rand og initialbetingelser! (Hvis kompatibelt!)

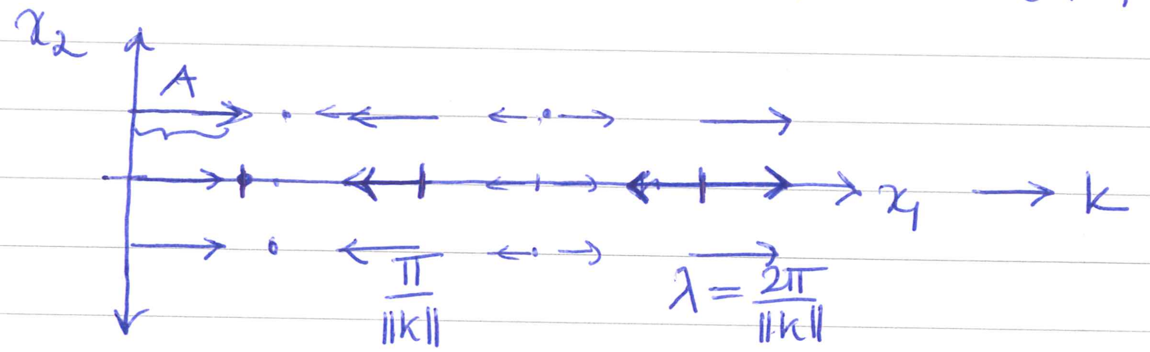
Bølgevektor, generalisering av bølgetallet. ④

Vi kan utvide dette til 3D ved f.eks (a)

$$\vec{u} = (A\cos(k\cdot x - ct), 0, 0) \qquad k=(1,0,0)$$

Da vil u løse (5) så lenge $\|k\| = \alpha c$

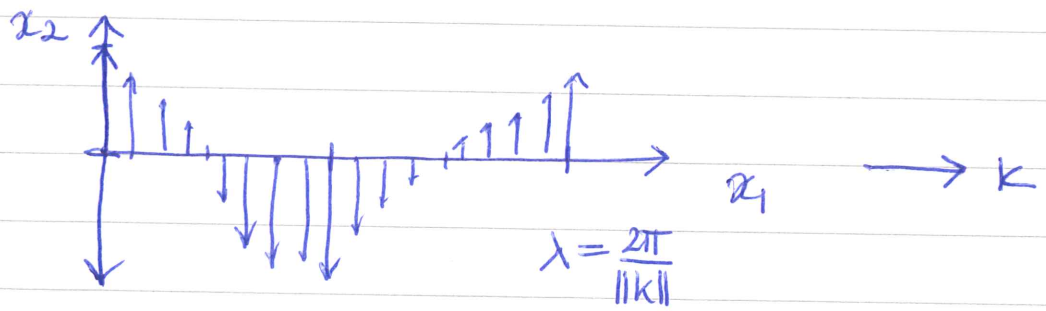
Dette er et eksempel på en ren plan trykkbølge (med $\nabla\times\vec{u} = 0$)
som ved $t=0$ ser noe slik ut for $k=(1,0,0)$



(b) Et annet eksempel er plan skjærbølge f.eks

$$\vec{u} = (0, A\cos(k\cdot x - ct), 0) \qquad k=(1,0,0)$$

som ved $t=0$ ser noe slikt ut



I disse eksemplene er $\|k\|=1$, så

$$c = 1/\alpha = \begin{cases} \sqrt{\rho/2\mu+\lambda} & \text{el. skjærbølge} \\ \sqrt{\rho/\mu} & \text{el. trykkbølge.} \end{cases}$$

(Bjørn Gjevik's kompendium i MEK2200 p. 63)

5

Hvor langt er det til et jordskjelvsenter?

Anta at et jordskjelv D unna genererer en plan bølge på formen $u = u_L + u_T$
med bølgehastigheter $c_L = \sqrt{\rho/\mu}$ og $c_T = \sqrt{\cancel{2\mu+}\ \rho/_{2\mu+\lambda}}$
der μ og λ er jordskorpens Lamé koeffisienter.
Anta at trykkbølgen registreres der du er ved tid T_1 og skjær-bølgen ved tid $T_2 > T_1$, $T_2 = T_1 + \Delta T$

$$T_1 = \frac{D}{c_L} \qquad T_2 = \frac{D}{c_T} = T_1 + \Delta T$$

Tid er distanse delt på hastighet

A:

Så da vil

$$\cancel{D =} \quad \cancel{c_T/V_2/\neq} \quad \Delta T = \frac{D}{c_L} - \frac{D}{c_T} = \frac{c_T D - c_L D}{c_L c_T}$$

dvs

$$D = \frac{c_L c_T}{c_T - c_L}\,\Delta T$$

Q: Hvor stor er D (uttrykt ved $\mu, \lambda, \rho, \underbrace{T_1, T_2}_{\Delta T}$)?

~~Setter sammen (6)+(7) og få:~~

$$\cancel{\mu \nabla \cdot \nabla \vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla \nabla \cdot \vec{u} = -\rho \omega^2 \vec{u} \quad (8)}$$

~~Så harmoniske elastiske bølger tilfredsstiller (8)~~

(iv)

(iii) $c = \tilde{u}(r) e^{-i\omega t} \in \mathbb{C}^3$

$$\mathrm{Re}\{c\} = \mathrm{Re}\{\tilde{u}(r)\,(\cos \overset{(-\omega t)}{\cancel{x}} + i \sin \overset{(-\omega t)}{\cancel{x}})\}$$

$$= \mathrm{Re}\{u_1 \cos \overset{(-\omega t)}{\cancel{x}} + i u_2 \cos \overset{(-\omega t)}{\cancel{x}} + u_1 i \sin \overset{(-\omega t)}{\cancel{x}} - u_2 \sin \overset{(-\omega t)}{\cancel{x}}\}$$

$$= u_1 \cos(-\omega t) - u_2 \sin(-\omega t)$$

$$= u_1 \cos(\omega t) + u_2 \sin(\omega t)$$

(ii) Husk at $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (Euler's formel)

(i) Her tar nå boken av på komplekse bølgeformer ved å identifisere

$$\tilde{u} = u_1 + i u_2 \quad \text{og} \quad u = \mathrm{Re}\{\underbrace{\tilde{u} e^{-i\omega t}}_{c}\}$$

Harmoniske bølger

~~Planebølger er eksemplet på harmoniske bølger.~~
Def: Harmonisk bølge
En harmonisk bølge ~~er~~, med frekvens ω, er løsninger av ligningen:

$$(6) \qquad \ddot{u}(x,t) = -\omega^2 u(x,t) \qquad \forall x,t$$

Generelle løsninger av (6) er på formen

$$(7) \quad u(x,t) = u_1(x)\cos(\omega t) + u_2(x)\sin(\omega t)$$

Vilkårlig funksjon av x (og potensielt også ω...)

Merk at

$$2\cos(\alpha x)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha x - \omega t) + \cos(\alpha x + \omega t)\right]$$

Hvilke harmoniske bølger er også løsninger av den elastiske bølgeligningen (4) ?

Setter sammen (6) og (4) og får at harmoniske elastiske bølger må tilfredsstille

$$\mu \nabla \cdot \nabla \vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla \nabla \cdot \vec{u} = -\rho \omega^2 \vec{u}$$

- Harmoniske bølger er av spesiell interesse fordi

vi kan uttrykke enhver tidsavhengig funksjon som en sum (eller integral) av harmoniske funksjoner (Fourier rekker / Fourier-transform) over forskjellige frekvenser ω. Vi går ikke mer inn på dette her.

Sjekk av at (7) løser (6):

$$\dot{u}(x,t) = -\omega u_1(x) \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\, \omega t + \omega u_2(x) \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\, \omega t$$

$$\ddot{u}(x,t) = -\omega^2 u_1(x) \cos \omega t - \omega^2 u_2(x) \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\, \omega t$$

$$= -\omega^2 u(x,t)$$

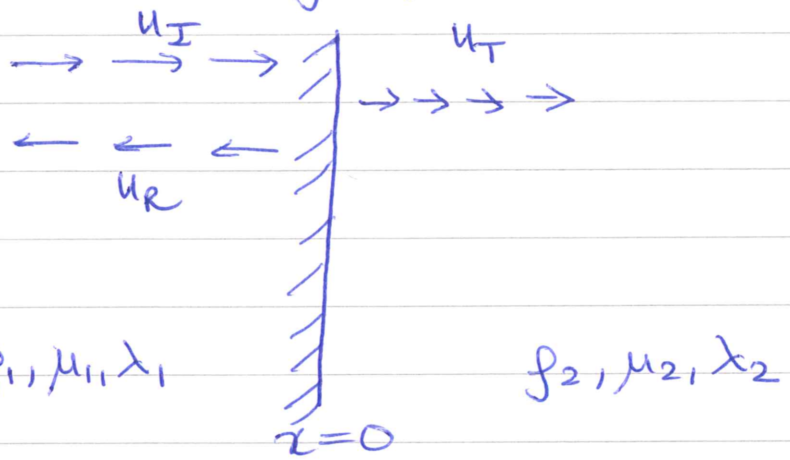
Refleksjon av elastiske bølger

Bølger som sprer seg inn i områder der Lamé parametrene endres (er heterogene) vil kunne bøyes og reflekteres.

- Brukes til å finne olje (geologi) og svulster (medisin)

Dette blir fort komplisert, vi ser på ett tilfelle:

Anta at vi har en plan longitudinalbølge som kommer normalt inn mot en plan skilleflate mellom to homogene elastiske lag og fører til:



Innkommende $u_I = (I \sin k_1(x - c_1 t), 0, 0)$
Reflektert $u_R = (R \sin k_1(x - c_1 t), 0, 0)$
Overført/Transmittert $u_T = (T \sin k_2(x - c_2 t), 0, 0)$

La oss bare skrive dette i 1D og se bort fra 2&3 komponent.

Da har vi at den totale forskyvningen i lag 1 er gitt ved

$$u_1(x) = u_I(x) + u_R(x)$$

mens forskyvningen i lag 2 er gitt ved

$$u_2(x) = u_T(x)$$

Spenningene i lag 1 er da

$$\sigma_{11}^1 = (2\mu_1 + \lambda_1)\frac{du_1}{dx} = \rho_1 c_1^2 \frac{du_1}{dx}$$

og

$$\sigma_{11}^2 = (2\mu_2 + \lambda_2)\frac{du_2}{dx} = \rho_2 c_2^2 \frac{du_2}{dx}$$

La oss anta at spenningene er kontinuerlige over $x=0$ (skillet mellom de to lagene) og det samme for forskyvningene dvs:

$$u_1(x=0) = u_2(x=0)$$
$$\rho_1 c_1^2 \frac{du_1}{dx} = \rho_2 c_2^2 \frac{du_2}{dx}$$

Dette gir at (noe regning!)

$$k_1 c_1 = k_2 c_2$$

og

$$I - R = T \qquad \rho_1 c_1 I + \rho_2 c_2 R = \rho_2 c_2 T$$

$$R = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} I \qquad T = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} I$$

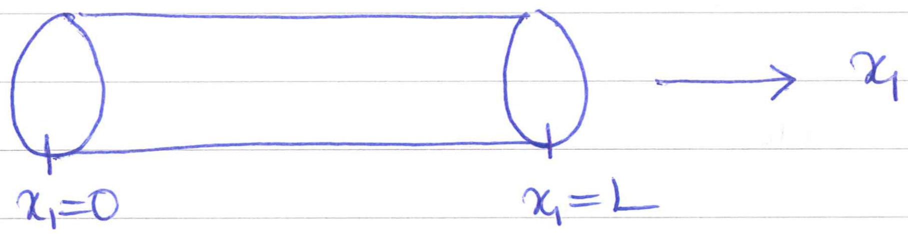
$\rho_i c_i$ = akustisk impedanse i lag i.

Refleksjonskoeffisienten

$$r = \frac{R}{I} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$$

Beskrives da forholdet i amplitude mellom reflektert og innkommende bølge.

Trykkbølger i en elastisk stav



Trykkbølger tilfredsstiller

$$(9) \qquad \ddot{u}(x,t) = \alpha^2 \Delta u(x,t) \qquad \alpha^2 = (\rho/\mu)^{-1} = \mu/\rho$$

Vi vet at denne ligningen kan ha løsning

$$u(x,t) = f(k \cdot x - ct)$$

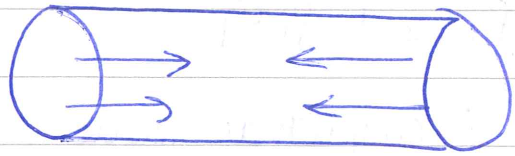
Anta $k = (1,0,0)$ og at $u(x,t) = (u_1(x,t), 0, 0)$. dvs, vi er på jakt etter

$$u_1(x,t) = f_1(x_1 - ct)$$

Anta frie ender dvs $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$ for $x_1 = 0$, $x_1 = L$ (11)

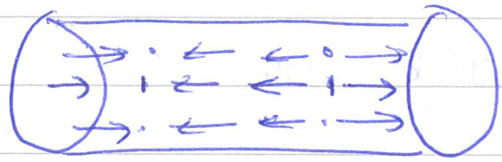
Illustrasjon av u_1 gitt ved (12) for $n=1,2,..$

$$u_1 = B\cos\left(\frac{\pi}{L}\right)\cos(\omega t)$$



$n=1$

$$u_2 = B\cos\left(\frac{2\pi}{L}\right)\cos(\omega t)$$



$n=2$

etc.

Kan dette være en løsning?

$$u(x_1,t) = \hat{u}(x_1)\cos\omega t \qquad (8)$$

Setter vi (8) inn i (9) (~~og bruker separasjon av variable~~) får vi:

$$(10) \quad -\omega^2 \hat{u}(x_1)\cancel{\cos\omega t} = \alpha^2 \cancel{\cos\omega t}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(x_1)$$

~~For at dette skal gjelde for alle~~

Generell løsning av (10) er (med $k = \frac{\omega}{\alpha}$)

$$\hat{u}_1(x_1) = A\sin(kx_1) + B\cos(kx_1)$$

For at (11) skal holde så må

$$A = 0 \quad \text{og} \quad kL = n\pi \qquad n = 1, 2, \ldots$$

La $k_n = \frac{n\pi}{L}$ $n = 1, 2, \ldots$

Så da vil alle stående svingninger være løsninger

$$(12) \quad u(x_1,t) = B\cos k_n x \cos\omega t$$

for $k_n = \frac{n\pi}{L}$ og $\omega = k_n\alpha = k_n \mu/\rho$

THE END!