

# Lecture 13: Bølger i elastiske media II 18.11.15

## Topics:

- o Harmoniske vibrasjoner } 24.2
- o Bare bølger } 24.2
- o Refleksjon og refraksjon ~ 24.3
- o Overflatebølger 24.4

Lautrup

## Repetisjon:

De dynamiske elastisitetligningene:

$$\rho \ddot{u} = \nabla \cdot \sigma + f \quad (1)$$

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \text{tr} \varepsilon I \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (3)$$

som slått sammen gir Navier's dynamiske ligninger

$$\rho \ddot{u} = \mu \nabla \cdot \nabla u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + f \quad (4)$$

Alle vektorfelt  $u$ , og spesielt løsninger av (4) kan dekomponeres som

$$u = u_L + u_T$$

Trykkbølge →  $u_L$       ← Skjærbølge  $u_T$

der  $\nabla \times u_L = 0 = \nabla \cdot u_T$ . For at  $u$  skal løse (4) så må  $u_L$  og  $u_T$  løse hver sin bølge ligning

$$\rho \ddot{u}_T = \mu \Delta u_T \quad \text{og} \quad \rho \ddot{u}_L = (2\mu + \lambda) \Delta u_L$$

$$\Delta u(x)_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u$$

Bjørn Gjeviks MEC2200 kompendium +

Stoffet er fra



Hva vet vi om løsninger av bølge ligningen ?

Anta  $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$   $x = (x_1, x_2, x_3)$

Hva med funksjoner på formen

Bølgevektor

(\*)  $\vec{u}(x, t) = \vec{f}(k \cdot x - ct)$   $\vec{k} = k = (k_1, k_2, k_3)$

Vil slike løse

Anta at  $f$  er en vilkårlig, 2x deriverbar vektorfunksjon.

(5)  $\ddot{u} = \alpha^2 \Delta u$

for passende  $\alpha$ ? Ja:

(\*) Angir en plan bølge. En plan bølge er slik at forskyvningen  $u$  er lik i et plan normalt på bølgeretningen ( $k \cdot x = 0$ )

$\dot{u}(x, t) = f'(k \cdot x - ct) \cdot (-c)$

$\ddot{u}(x, t) = c^2 f''(k \cdot x - ct)$

$\Delta u_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i(x, t) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f_i(k \cdot x - ct)$

$= \sum_{j=1}^d f_i''(k \cdot x - ct) \cdot k_j^2 = f_i''(k \cdot x - ct) \|k\|^2$

når  $\|k\| = \sum_{j=1}^d k_j^2 = k \cdot k$

Så for  $\alpha = \|k\|/c$  så vil (\*) løse (5).

Det finnes mange andre løsninger og.., men (\*) er ett eksempel, og altså en plan bølge.





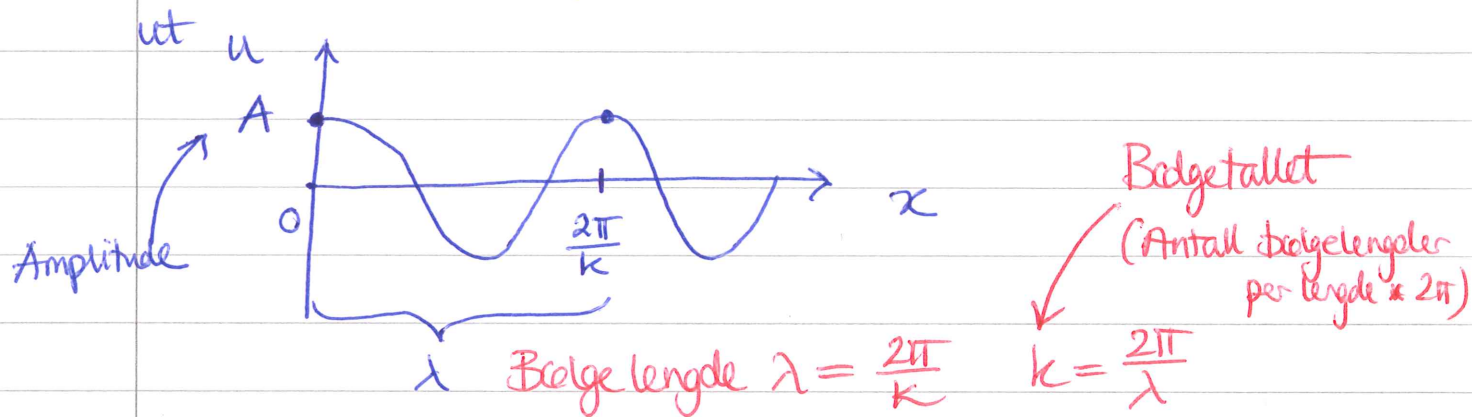
Eksempler på plane bølger:

La oss ta 1D først:  $x = (x_1)$ . Ta f. eks

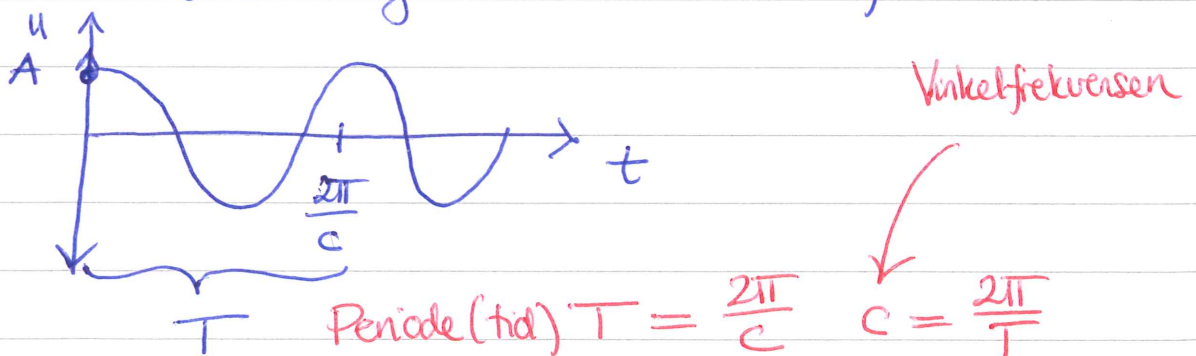
$$u(x,t) = A \cos(kx - ct)$$

Dette er en plan (og harmonisk) bølge (Mer om harmoniske bølger senere.) (som løser (5) ved (\*))

Hold  $t$  konstant (f. eks  $t=0$ ). Da vil  $u$  se noe slikt ut



Hold så  $x$  konstant (f. eks  $x=0$ ). Da vil  $u$  se noe slikt ut (cos er symmetrisk om  $x$ -aksen)



- Merk at vi like gjerne kunne brukt  $u = A \sin(kx - ct)$  eller tatt summen!
- Koeffisientene  $A$ ,  $k$  og  $c$  kan bestemmes ved rand og initialbetingelser! (Hvis kompatibelt!)

1. The first part of the paper discusses the importance of understanding the underlying mechanisms of the system being studied. This involves identifying the key variables and their interactions.

2. The second part of the paper focuses on the development of a theoretical model that can explain the observed phenomena. This model is based on the principles of physics and chemistry.

3. The third part of the paper describes the experimental setup used to test the model. This includes the choice of materials, the design of the apparatus, and the procedures for data collection.

4. The fourth part of the paper presents the results of the experiments and compares them with the predictions of the model. This allows for a validation of the model and a deeper understanding of the system.

5. The fifth part of the paper discusses the implications of the findings and suggests directions for future research. This is an important step in the scientific process, as it helps to identify the next steps in the investigation.

6. The sixth part of the paper concludes the study and summarizes the key findings. This provides a clear and concise overview of the work and its contributions to the field.

7. The seventh part of the paper is a discussion of the broader context of the research. This includes a review of related work and an analysis of the current state of the field.

8. The eighth part of the paper is a conclusion that summarizes the main points of the paper and provides a final thought on the significance of the work.

9. The ninth part of the paper is a list of references, which provides a comprehensive overview of the literature that has informed the study.

10. The tenth part of the paper is an appendix that contains supplementary information, such as additional data, figures, and tables, that are not included in the main text.

11. The eleventh part of the paper is a final section that provides a summary of the entire document and offers some final thoughts on the research and its potential impact.

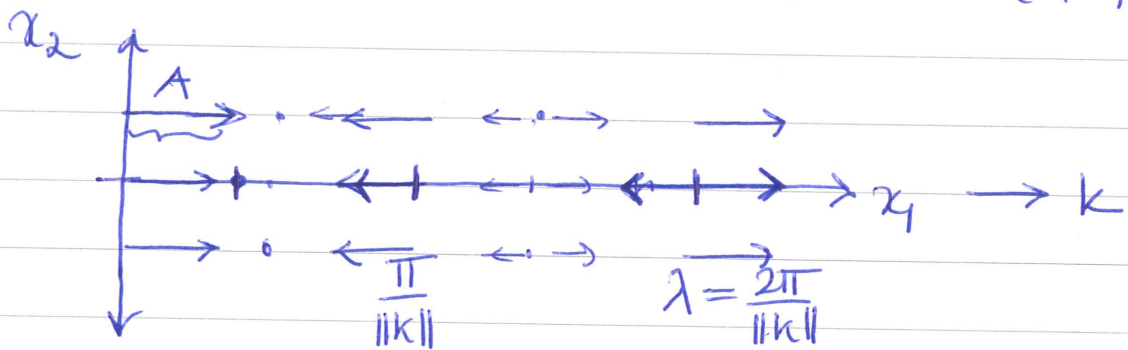
Bølgevektor, generalisering av bølgetallet. (4)

Vi kan utvide dette til 3D ved f.eks (a)

$$\vec{u} = (A \cos(kx - ct), 0, 0) \quad k = (1, 0, 0)$$

Da vil u løse (5) så lenge  $\|k\| = \alpha c$

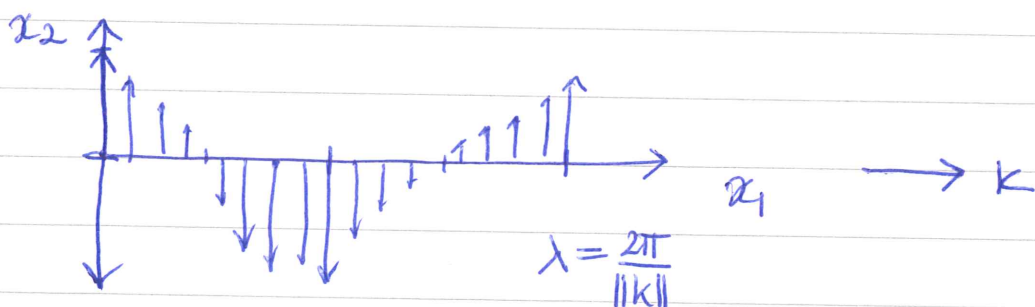
Dette er et eksempel på en <sup>plan</sup> trykkbølge (med  $\nabla \times \vec{u} = 0$ ) som ved  $t=0$  ser noe slik ut for  $k = (1, 0, 0)$



(b) Et annet eksempel er plan skjæringsbølge f.eks

$$\vec{u} = (0, A \cos(k \cdot x - ct), 0) \quad k = (1, 0, 0)$$

som ved  $t=0$  ser noe slikt ut



I disse eksemplene er  $\|k\|=1$ , så

$$c = 1/\alpha = \begin{cases} \sqrt{\rho/2\mu + \lambda} & \text{el. skjæringsbølge} \\ \sqrt{\rho/\mu} & \text{el. trykkbølge.} \end{cases}$$

1)

1.  $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

2.  $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3}$

3.  $= -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

4.  $= -\frac{2}{x^3}$

5.  $= -\frac{2}{x^3}$

6.  $= -\frac{2}{x^3}$

7.  $= -\frac{2}{x^3}$

8.  $= -\frac{2}{x^3}$

9.  $= -\frac{2}{x^3}$

10.  $= -\frac{2}{x^3}$

11.  $= -\frac{2}{x^3}$

12.  $= -\frac{2}{x^3}$

13.  $= -\frac{2}{x^3}$

14.  $= -\frac{2}{x^3}$

15.  $= -\frac{2}{x^3}$

16.  $= -\frac{2}{x^3}$

17.  $= -\frac{2}{x^3}$

18.  $= -\frac{2}{x^3}$

19.  $= -\frac{2}{x^3}$

20.  $= -\frac{2}{x^3}$

21.  $= -\frac{2}{x^3}$

22.  $= -\frac{2}{x^3}$

23.  $= -\frac{2}{x^3}$

24.  $= -\frac{2}{x^3}$

Hvor langt er det til et jordskjelvsenter?

plan

Anta at et jordskjelv D unna genererer en bølge

på formen

$$u = u_L + u_T$$

med bølgehastigheter  $c_L = \sqrt{\rho/\mu}$  og  $c_T = \sqrt{2\mu/\rho(2\mu+\lambda)}$

der  $\mu$  og  $\lambda$  er jordskorpens Lamé koeffisienter.

Anta at trykkbølger registreres der du er ved tid  $T_1$  og skjuer-bølger ved tid  $T_2 > T_1$ ,  $T_2 = T_1 + \Delta T$

$$T_1 = \frac{D}{c_L}$$

$$T_2 = \frac{D}{c_T} = T_1 + \Delta T$$

Tid er distanse delt på hastighet

A:

Se da vil

$$D = c_T T_2 \neq \Delta T = \frac{D}{c_L} - \frac{D}{c_T} = \frac{c_T D - c_L D}{c_L c_T}$$

altså 
$$D = \frac{c_L c_T}{c_T - c_L} \Delta T$$

Q: Hvor stor er D (uttrykt ved  $\mu, \lambda, \rho, T_1, T_2$ )?



Setter sammen (6)+(7) og får:

$$\mu \nabla \cdot \nabla \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} = -f \omega^2 \vec{u} \quad (8)$$

Så harmoniske elastiske følger tilfredsstiller (8)

(ii)

$$(iii) \quad c = \tilde{u}(r) e^{-i\omega t} \in \mathbb{C}^3$$

$$\operatorname{Re}\{c\} = \tilde{u}(r) (\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t))$$

$$= \operatorname{Re}\{u_1 \cos(-\omega t) + i u_2 \cos(-\omega t) + i u_1 \sin(-\omega t) - u_2 \sin(-\omega t)\}$$

$$= u_1 \cos(-\omega t) - u_2 \sin(-\omega t)$$

$$= u_1 \cos(\omega t) + u_2 \sin(\omega t)$$

(ii) Husk at  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  (Euler's formel)

(i) Her tar nå tåken av på komplekse følgeformer ved å identifisere

$$\tilde{u} = u_1 + i u_2 \quad \text{og} \quad u = \operatorname{Re}\left\{ \underbrace{\tilde{u} e^{-i\omega t}}_c \right\}$$

## Harmoniske bølger

Planer bølger er eksemplet på harmoniske bølger.

Def: Harmonisk bølge

En harmonisk bølge ~~er~~, med frekvens  $\omega$ , er løsninger av ligningen:

$$(6) \quad \ddot{u}(x,t) = -\omega^2 u(x,t) \quad \forall x,t$$

Generelle løsninger av (6) er på formen

$$(7) \quad u(x,t) = u_1(x) \cos(\omega t) + u_2(x) \sin(\omega t)$$

Vilkårlig funksjon av  $x$  (og potensielt også  $\omega$ ...)

Merk at

$$2 \cos(\alpha x) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha x - \omega t) + \cos(\alpha x + \omega t)]$$

Hvilke harmoniske bølger er også løsninger av den elastiske bølge ligningen (4) ?

Setter sammen (6) og (4) og får at harmoniske elastiske bølger må tilfredsstille

$$\mu \nabla \cdot \nabla \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} = -\rho \omega^2 \vec{u}$$

- Harmoniske bølger er av spesiell interesse fordi

(2)

1.  $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

2.  $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3}$

3.  $= -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

4.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

5.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

6.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

7.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

8.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

9.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

10.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

11.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

12.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

13.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

vi kan uttrykke enhver tidsavhengig funksjon som en sum (eller integral) av harmoniske funksjoner (Fourier rekke / Fourier-transform) over forskjellige frekvenser  $\omega$ . Vi går ikke mer inn på dette her.

Sjekk av at (7) løser (6):

$$\begin{aligned} \dot{u}(x,t) &= -\omega u_1(x) \overset{\sin}{\cancel{\cos}} \omega t + \omega u_2(x) \overset{\cos}{\cancel{\sin}} \omega t \\ \ddot{u}(x,t) &= -\omega^2 u_1(x) \cos \omega t - \omega^2 u_2(x) \overset{\sin}{\cancel{\cos}} \omega t \\ &= -\omega^2 u(x,t) \end{aligned}$$

1. The first part of the text discusses the importance of understanding the context of the data being analyzed.

2. It then goes on to describe the various methods used to collect and analyze the data.

3. The author also discusses the challenges faced during the data collection and analysis process.

4. Finally, the text concludes with a summary of the findings and their implications for future research.

5. The author also provides a list of references for further reading.

6. The text is well-organized and easy to read, making it a valuable resource for anyone interested in data analysis.



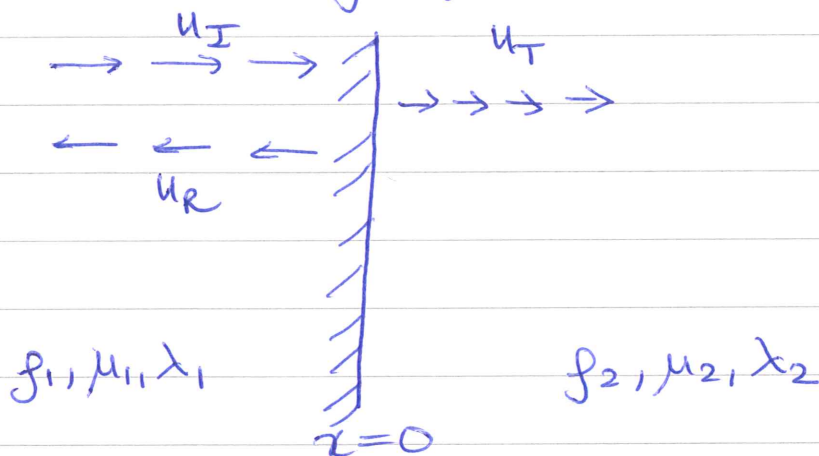
## Refleksjon av elastiske bølger

Bølger som sprer seg inn i områder der lamé parametrene endres (er heterogene) vil kunne bryes og reflekteres.

- Brukes til å finne olje (geologi) og svulster (medisin)

Dette blir fort komplisert, vi ser på ett tilfelle:

Anta at vi har en plan longitudinalbølge som kommer normalt inn mot en plan skilleflate mellom to homogene elastiske lag og fører til:



Inkommende  $u_I = (I \sin k_1(z - c_1 t), 0, 0)$

Reflektet  $u_R = (R \sin k_1(z - c_1 t), 0, 0)$

Overført/Transmittet  $u_T = (T \sin k_2(z - c_2 t), 0, 0)$

La oss bare skrive dette i 1D og se bort fra 2&3 komponent.



(9)

Da har vi at den totale forskyningen i lag 1 er gitt ved

$$u_1(x) = u_I(x) + u_R(x)$$

medens forskyningen i lag 2 er gitt ved

$$u_2(x) = u_T(x)$$

Spenningsene i lag 1 er da

$$\sigma_{11}' = (2\mu_1 + \lambda_1) \frac{du_1}{dx} = \rho_1 c_1^2 \frac{du_1}{dx}$$

og

$$\sigma_{22}' = (2\mu_2 + \lambda_2) \frac{du_2}{dx} = \rho_2 c_2^2 \frac{du_2}{dx}$$

La oss anta at spenningsene er kontinuerlige over  $x=0$  (skillet mellom de to lagene) og det samme for forskyningene dvs:

$$u_1(x=0) = u_2(x=0)$$

$$\rho_1 c_1^2 \frac{du_1}{dx} = \rho_2 c_2^2 \frac{du_2}{dx}$$

Dette gir at (noe regning!)

$$k_1 c_1 = k_2 c_2$$

og

$$I - R = T$$

$$\rho_1 c_1 I + \rho_2 c_2 R = \rho_2 c_2 T$$

$$R = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} I$$

$$T = \frac{2\rho_1 \rho_2 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} I$$

$\rho_i c_i =$  akustisk impedanse i lag  $i$ .

1. The first part of the document is a list of names and addresses.

2. The second part is a list of names and addresses.

3. The third part is a list of names and addresses.

4. The fourth part is a list of names and addresses.

5. The fifth part is a list of names and addresses.

6. The sixth part is a list of names and addresses.

7. The seventh part is a list of names and addresses.

8. The eighth part is a list of names and addresses.

9. The ninth part is a list of names and addresses.

10. The tenth part is a list of names and addresses.

11. The eleventh part is a list of names and addresses.

12. The twelfth part is a list of names and addresses.

13. The thirteenth part is a list of names and addresses.

14. The fourteenth part is a list of names and addresses.

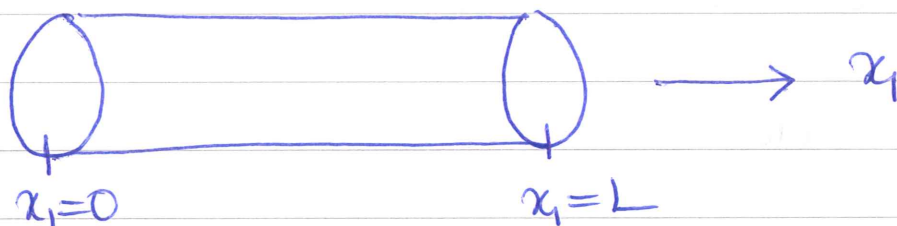
15. The fifteenth part is a list of names and addresses.

## Refleksjonskoeffisienter

$$r = \frac{R}{I} = \frac{f_2 c_2 - f_1 c_1}{f_2 c_2 + f_1 c_1}$$

Beskrives da forholdet i amplitude mellom reflektert og innkommende bølge.

## Trykkebølger i en elastisk stav



Trykkebølger tilfredsstiller

$$(9) \quad \ddot{u}(x,t) = \alpha^2 \Delta u(x,t) \quad \alpha^2 = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-1} = \mu/\rho$$

Vi vet at denne ligningen kan ha løsning

$$u(x,t) = f(k \cdot x - ct)$$

Anta  $k = (1, 0, 0)$  og at  $u(x,t) = (u_1(x,t), 0, 0)$ , dvs, vi er på jakt etter

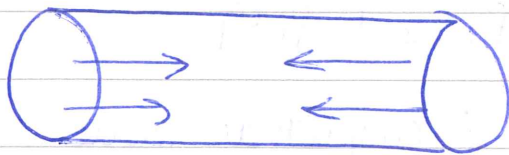
$$u_1(x,t) = f_1(x_1 - ct)$$

Anta frie ender dvs  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$  for  $x_1 = 0$  (II)  
 $x_1 = L$



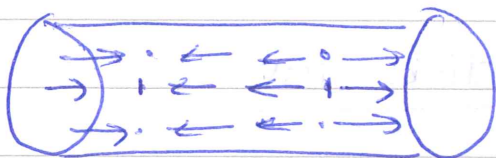
Illustrasjon av  $u_2$  gitt ved (12) for  $n=1, 2, \dots$

$$u_1 = B \cos\left(\frac{\pi}{L}\right) \cos(\omega t)$$



$n=1$

$$u_2 = B \cos\left(\frac{2\pi}{L}\right) \cos(\omega t)$$



$n=2$

etc.

Kan dette være en løsning?

$$u(x_1, t) = \hat{u}(x_1) \cos \omega t \quad (8)$$

Settes in (8) inn i (9) (og ~~brukes separasjon av variable~~) for  $u$ :

$$(10) \quad -\omega^2 \hat{u}(x_1) \cancel{\cos \omega t} = \cancel{\cos \omega t} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_1)$$

~~For at dette skal gjelde for alle~~

Generell løsning av (10) er (med  $k = \frac{\omega}{\alpha}$ )

$$\hat{u}_g(x_1) = A \sin(kx_1) + B \cos(kx_1)$$

For at (11) skal holde så må

$$A = 0 \quad \text{og} \quad kL = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{La} \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots$$

Så da vil alle stående svingninger være løsninger

$$(12) \quad u_i(x_1, t) = B \cos k_n x \cos \omega t$$

$$\text{for} \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{og} \quad \omega = k_n \alpha = k_n^{M/f}$$

THE END!

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..