23.11.2015

Lecture 14 : MEK2500 Summary

$a = \left[F / \rho_0 \right]$

Lecture 2:

- Deformation $x = f(X) \iff X = f^{-1}(x)$
- Displacement $u = f - X \quad u(X) = f(X) - X$
- Euler vs. Lagrange $(\tilde{u}(x) = x - f^{-1}(x))$
- Cauchy's (infinitesimale) tøyningstensor ε

$\rho a = -\operatorname{div} \sigma + f$

Lecture 3:

- ε symmetrisk
- $\varepsilon(u) = 0$ hvis u er en "rigid body motion"
- Hovedtøyningene (egenverdiene til ε)
  Hovedtøyningsretningene (egenvektorene til ε)
- $a \cdot b - A \cdot B = a^T \mathbf{D} b \simeq 2 a^T \varepsilon b$

$\rightarrow$ der $\mathbf{D} = \varepsilon - \frac{1}{2} \nabla u \nabla u^T$ er Euler–Almansi tøyningstensoren

$(a = A^T \nabla_X x \qquad A = a^T \nabla_x X)$

- Endring i volum $\frac{\delta V}{V} = \operatorname{div} u$

Lecture 4:

σ_{ij} er s. komp. som virker på flate m/normal e_i i retning j.

- Spenning er kraft / flateenhet
- Cauchy's spenningstensor σ, $s_n = \sigma \cdot n$, $\{\sigma_{ij}\}_{i=1,j=1}^{d\,d}$
- Normalspenning $(\sigma \cdot n) \cdot n$
  Skjærspenninger $(\sigma \cdot n) \times n$
- Hovedspenningene (Egenverdiene til σ)
  Hovedspenningsretningene (Egenvektorene til σ)
- Trykkspenning $(\sigma_{ii} < 0)$, strekkspenning $(\sigma_{ii} > 0)$

$\sigma = \sigma^T$

- Trykk. $\sigma = pI \longleftarrow$ isotropt trykk
- Mekanisk trykk $p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma$
- Trykkkomponenter

$$p_i = -\sigma_{ii}$$

Lecture 5

- Strekkstyrke (max strekkspenning uten brudd)
- Flytstyrke σ_y (max —"— uten permenent def.)
- Von Mises spenningenes

$$\sigma_{VM}^2 = \frac{3}{2} \sigma_{dev} : \sigma_{dev} \qquad \sigma_{dev} = \sigma - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma I$$

- Von Mises flytkriterium

$$\sigma_{vm} < \sigma_y$$

- Totale kraft (N)

$$F_{tot} = \int_V f \, dx + \int_V \operatorname{div} \sigma \, dx$$

- Momentligningen

$$\rho a = f + \operatorname{div} \sigma \qquad (N/m^d)$$

- Mekanisk likevekt $\iff f + \operatorname{div} \sigma = 0$
- Hvis et legeme som ikke er i mek. lik. forskyves med en gitt u, så krever dette arbeid W

$$W = -\int_\Omega f \cdot u \, dx + \int_\Omega \sigma : \varepsilon(u) \, dx \qquad (N \cdot m)$$

Lecture 6:

- Sakte-varierende deformasjoner / små forskyvnings gradienter. Euler $\simeq$ Lagrange. Lineære approx. gjelder.
- Hooke

$$\sigma = C\varepsilon$$

- Under antagelse om isotropi:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \operatorname{tr}\varepsilon\, I$$

Young's modulus, Poisson's ration $\nu \in (0, 1/2)$

- $$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

- Hooke (isotrop) invers:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\operatorname{tr}\sigma\, I\right] = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\sigma\, I$$

- Elastisk energitetthet

$$\psi = \frac{1}{2}\sigma(\varepsilon) : \varepsilon \overset{\text{Lin.elastisk}}{=} \frac{1}{2} C\varepsilon(u) : \varepsilon(u)$$

og elastisk energi

$$\mathcal{E} = \int_\Omega \psi \, dx$$

Lecture 7

- Lineært elastisk (isotrope) likevektsligninger:

(i) $-\operatorname{div}\sigma = f$

(ii) $\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \operatorname{tr}\varepsilon\, I$

(iii) $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$

- Navier's ligning (statisk) (Homogent)

← ~~[illegible]~~

$$-\left(\mu(\Delta u) + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla \cdot u)\right) = f$$

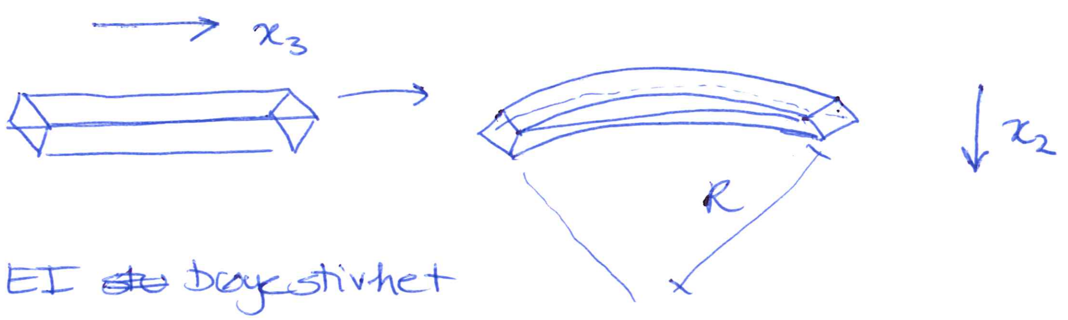
NB: Merk fortegnsfeil i forelesningsnotatene fra L7.

Lecture 8

- Bjelke (Homogent, isotropt, bunt av parallelle stråler slik at alle tversnitt er like)

- Bøyemoment $M = \int_A x_2 \sigma_{33}\, dA = -\frac{E}{R} \underbrace{\int_A x^2 dA}_{I}$

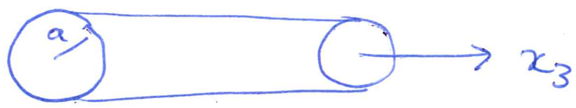
- Euler-Bernoullis lov $|M| = \frac{E}{R} I$



- EI ~~sti~~ bøyestivhet
- I treghetsmomentet
- Flytradius $R > a \frac{E}{\sigma_{yield}}$ min R ← Flytrad.

Lecture 9:

- Stav (Sirkuleert tversnitt bjelke)



- Dreiemoment: $M_t = \mu\tau \underbrace{\int_A (x_1^2 + x_2^2)\, dA}_{J}$

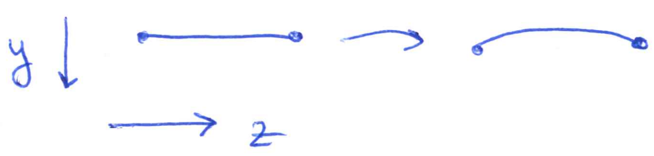
- Coulumb-Saint-Venants lov:
  $M_t = \mu \tau J$

- τJ dreiestivhet

⑤

Lecture 10

- Bøyning av staver / defleksjon om midtlinje
- Kun krefter i transversalretning (y)



$$\frac{d^2}{dz^2}\left[EI \frac{d^2 y}{dz^2} \right] = Ky$$

- Knekning – ikke-lineær ustabilitet

$$EI \frac{d^2}{dz^2} y(z) = -Fy$$

- For last over Euler grensen $F = \frac{\pi^2}{L^2} EI$ kan knekning skje.

Lecture 11: Ikke eksamensstoff (Fagverk)

Lecture 12:

- Dynamiske elastisitetsligningene for lin. elas., isotrop.

(i) $\rho \ddot{u} - \operatorname{div} \sigma = f$

(ii) $\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon I$

(iii) $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$

- Navier's dynamiske ligning (Homogent)

$$\rho \ddot{u} - \left[\mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u \right] = f$$

- $u = u_L + u_T$ der
- ~~Ro~~ Trykkbølge (Longitudinal) u_L, $\nabla \times u_L = 0$

  Skjærbølge (Transversal) u_T, $\nabla \cdot u = 0$
- Løser hver sin bølgeligning

$\rho \ddot{u}_T = \alpha_T^2 \Delta u_T$ $\rho \alpha_T^2 = \mu$ $\rho \ddot{u}_L = \alpha_L^2 \Delta u_L$ $\alpha_L^2 = 2\mu + \lambda$

Lecture 13

- Plane bølger: Forskyvning lik for alle x normalt på et plan (def. ved k), eks.

  $$u = f(k \cdot x - ct)$$

- Harmoniske elastiske bølger løser: $(f = 0)$

  $$-\left[\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u\right] = \rho \omega^2 u$$

- Refleksjon